Superpoderes Matemáticos para Concursos Militares

Volume 5A

2ª edição

COLÉGIO NAVAL 2012-2016

Renato Madeira

www.mademática.blogspot.com

Sumário

INTRODUÇÃO ... 2
CAPÍTULO 1 - ENUNCIADOS ... 3
PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2015/2016 ... 3
PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2014/2015 ... 9
PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2013/2014 ... 15
PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2012/2013 ... 21
PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2011/2012 ... 27
CAPÍTULO 2 ... 34
RESPOSTAS E CLASSIFICAÇÃO DAS QUESTÕES ... 34
QUADRO RESUMO DAS QUESTÕES DE 1984 A 2015 ... 37
CLASSIFICAÇÃO DAS QUESTÕES POR ASSUNTO ... 38
CAPÍTULO 3 ... 42
ENUNCIADOS E RESOLUÇÕES ... 42
PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2015/2016 ... 42
NOTA 1: Círculo de nove pontos ... 52
PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2014/2015 ... 63
PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2013/2014 ... 81
NOTA 2: Reta Simson ... 93
PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2012/2013 ... 99
NOTA 3: Fórmula de Legendre-Polignac: ... 104
PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2011/2012 ... 116

INTRODUÇÃO

Esse livro é uma coletânea com as questões das Provas de Matemática do Concurso de Admissão ao Colégio Naval (CN) dos anos de 1984 a 2016, mais uma "faixa bônus" com 40 questões anteriores a 1984, detalhadamente resolvidas e classificadas por assunto. Na parte A serão apresentadas as provas de 2012 a 2016, totalizando 100 questões.

No capítulo 1 encontram-se os enunciados das provas, para que o estudante tente resolvê-las de maneira independente.

No capítulo 2 encontram-se as respostas às questões e a sua classificação por assunto. É apresentada também uma análise da incidência dos assuntos nesses 35 anos de prova.

No capítulo 3 encontram-se as resoluções das questões. É desejável que o estudante tente resolver as questões com afinco antes de recorrer à sua resolução.

Espero que este livro seja útil para aqueles que estejam se preparando para o concurso da Colégio Naval ou concursos afins e também para aqueles que apreciam Matemática.

Renato de Oliveira Caldas Madeira é engenheiro aeronáutico pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) da turma de 1997 e Mestre em Matemática Aplicada pelo Fundação Getúlio Vargas (FGV-RJ); participou de olimpíadas de Matemática no início da década de 90, tendo sido medalhista em competições nacionais e internacionais; trabalha com preparação em Matemática para concursos militares há 20 anos e é autor do blog "Madematica".

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer aos professores que me inspiraram a trilhar esse caminho e à minha família pelo apoio, especialmente, aos meus pais, Cézar e Sueli, pela dedicação e amor.
Gostaria ainda de dedicar esse livro à minha esposa Poliana pela ajuda, compreensão e amor durante toda a vida e, em particular, durante toda a elaboração dessa obra e a meu filho Daniel que eu espero seja um futuro leitor deste livro.

Renato Madeira

Acompanhe o blog www.madematica.blogspot.com e fique sabendo dos lançamentos dos próximos volumes da coleção X-MAT!
Volumes já lançados:
Livro X-MAT Volume 1 EPCAr 2011-2015
Livro X-MAT Volume 2 AFA 2010-2015
Livro X-MAT Volume 3 EFOMM 2009-2015
Livro X-MAT Volume 4 ESCOLA NAVAL 2010-2015
Livro X-MAT Volume 6 EsPCEx 2011-2016

CAPÍTULO 1 - ENUNCIADOS

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2015/2016

1) Seja S a soma dos valores inteiros que satisfazem a inequação $\frac{(5x-40)^2}{x^2-10x+21} \le 0$. Pode-se afirmar que
a) S é um número divisível por 7.
b) S é um número primo.
c) S^2 é divisível por 5.
d) $\sqrt{S}$ é um número racional.
e) $3S+1$ é um número ímpar.

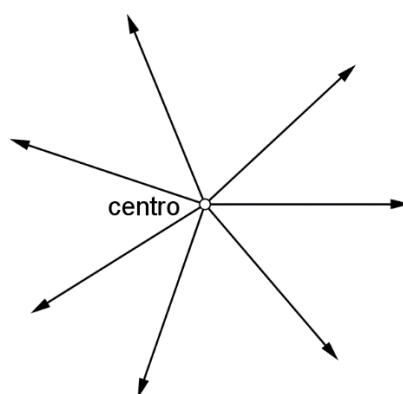
2) Dado o sistema $S:\begin{cases} 2x - ay = 6 \\ -3x + 2y = c \end{cases}$ nas variáveis x e y, pode-se afirmar que
a) existe $a \in \left]\frac{6}{5}, 2\right[$ tal que o sistema S não admite solução para qualquer número real c.
b) existe $a \in \left]\frac{13}{10}, \frac{3}{2}\right[$ tal que o sistema S não admite solução para qualquer número real c.
c) se $a = \frac{4}{3}$ e $c = 9$, o sistema S não admite solução.
d) se $a \ne \frac{4}{3}$ e $c = -9$, o sistema S admite infinitas soluções.
e) se $a = \frac{4}{3}$ e $c = -9$, o sistema S admite infinitas soluções.

3) Seja $k = \left(\frac{9999\ldots997^2 - 9}{9999\ldots994}\right)^3$ onde cada um dos números $9999\ldots997$ e $9999\ldots994$, são constituídos de 2015 algarismos 9. Deseja-se que $\sqrt[i]{k}$ seja um número racional. Qual a maior potência de 2 que o índice i pode assumir?
a) 32
b) 16
c) 8
d) 4
e) 2

4) Para capinar um terreno circular plano, de raio 7 m, uma máquina gasta 5 horas. Quantas horas gastará essa máquina para capinar um terreno em iguais condições com 14 m de raio?
a) 10
b) 15
c) 20
d) 25
e) 30

5) Para obter o resultado de uma prova de três questões, usa-se a média ponderada entre as pontuações obtidas em cada questão. As duas primeiras questões têm peso $3,5$ e a 3ª, peso 3. Um aluno que realizou essa avaliação estimou que:
I – sua nota na 1ª questão está estimada no intervalo fechado de 2,3 a 3,1; e
II – sua nota na 3ª questão foi 7.
Esse aluno quer atingir média igual a 5,6. A diferença da maior e da menor nota que ele pode ter obtido na 2ª questão de modo a atingir o seu objetivo de média é
a) 0,6
b) 0,7
c) 0,8
d) 0,9
e) 1

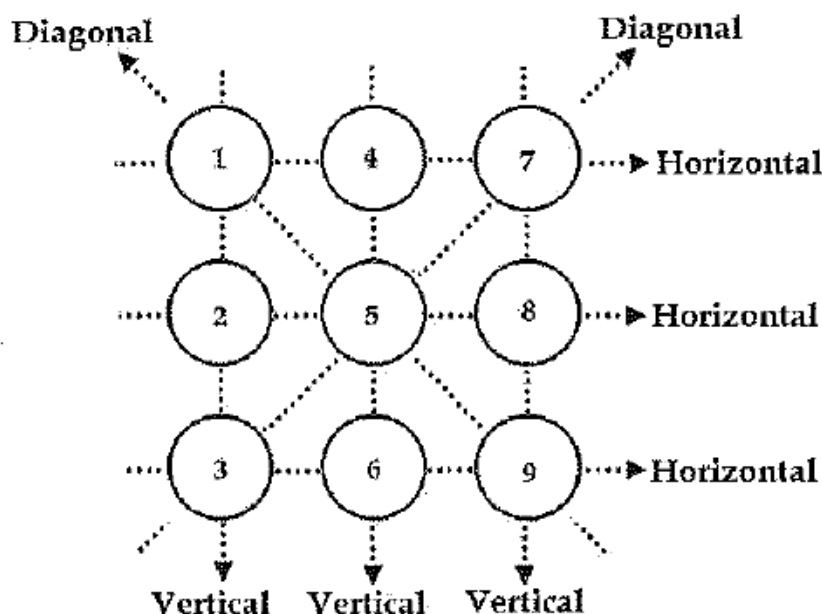
6) Qual a medida da maior altura de um triângulo de lados 3, 4, 5?
a) $\frac{12}{5}$
b) 3
c) 4
d) 5
e) $\frac{20}{3}$

7) Observe a figura a seguir.

A figura acima representa o trajeto de sete pessoas num treinamento de busca em terreno plano, segundo o método “radar”. Nesse método, reúne-se um grupo de pessoas num ponto chamado de “centro” para, em seguida, fazê-las andar em linha reta, afastando-se do “centro”. Considere que o raio de visão eficiente de uma pessoa é 100 m e que $\pi = 3$.

Dentre as opções a seguir, marque a que apresenta a quantidade mais próxima do mínimo de pessoas necessárias para uma busca eficiente num raio de 900 m a partir do "centro" e pelo método "radar".
a) 34
b) 27
c) 25
d) 20
e) 19

8) Num semicírculo S, inscreve-se um triângulo retângulo ABC. A maior circunferência possível que se pode construir externamente ao triângulo ABC e internamente ao S, mas tangente a um dos catetos de ABC e ao S, tem raio 2. Sabe-se ainda que o menor cateto de ABC mede 2. Qual a área do semicírculo?
a) 10π
b) $12,5\pi$
c) 15π
d) $17,5\pi$
e) 20π

9) Seja x um número real tal que $x^3 + x^2 + x + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + 2 = 0$. Para cada valor real de x, obtém-se o resultado da soma de x^2 com seu inverso. Sendo assim, a soma dos valores distintos desses resultados é
a) 5
b) 4
c) 3
d) 2
e) 1

10) Observe a figura a seguir.

A figura acima é formada por círculos numerados de 1 a 9. Seja "TROCA" a operação de pegar dois desses círculos e fazer com que um ocupe o lugar que era do outro. A quantidade mínima S de "TROCAS" que devem ser feitas para que a soma dos três valores de qualquer horizontal, vertical ou diagonal, seja a mesma, está no conjunto:
a) {1, 2, 3}
b) {4, 5, 6}
c) {7, 8, 9}
d) {10, 11, 12}
e) {13, 14, 15}

11) Seja n um número natural e $\oplus$ um operador matemático que aplicado a qualquer número natural, separa os algarismos pares, os soma, e a esse resultado, acrescenta tantos zeros quanto for o número obtido. Exemplo: $\oplus(3256) = 2 + 6 = 8$, logo fica: 800000000. Sendo assim, o produto $[\oplus(20)] \cdot [\oplus(21)] \cdot [\oplus(22)] \cdot [\oplus(23)] \cdot [\oplus(24)] \cdot \ldots \cdot [\oplus(29)]$ possuirá uma quantidade de zeros igual a
a) 46
b) 45
c) 43
d) 41
e) 40

12) Na multiplicação de um número k por 70, por esquecimento, não se colocou o zero à direita, encontrando-se, com isso, um resultado 32823 unidades menor. Sendo assim, o valor para a soma dos algarismos de k é
a) par.
b) uma potência de 5.
c) múltiplo de 7.
d) um quadrado perfeito.
e) divisível por 3.

13) Seja ABC um triângulo de lados medindo 8, 10 e 12. Sejam M, N e P os pés das alturas traçadas dos vértices sobre os lados desse triângulo. Sendo assim, o raio do círculo circunscrito ao triângulo MNP é
a) $\frac{5\sqrt{7}}{7}$
b) $\frac{6\sqrt{7}}{7}$
c) $\frac{8\sqrt{7}}{7}$
d) $\frac{9\sqrt{7}}{7}$
e) $\frac{10\sqrt{7}}{7}$

14) ABC é um triângulo equilátero. Seja D um ponto do plano de ABC, externo a esse triângulo, tal que DB intersecta AC em E, com E pertencendo ao lado AC. Sabe-se que $B\hat{A}D = A\hat{C}D = 90°$. Sendo assim, a razão entre as áreas dos triângulos BEC e ABE é

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{2}{5}$

15) Seja ABCD um quadrado de lado "2a" cujo centro é "O". Os pontos M, P e Q são os pontos médios dos lados AB, AD e BC, respectivamente. O segmento BP intersecta a circunferência de centro "O" e raio "a" em R e, também OM, em "S". Sendo assim, a área do triângulo SMR é

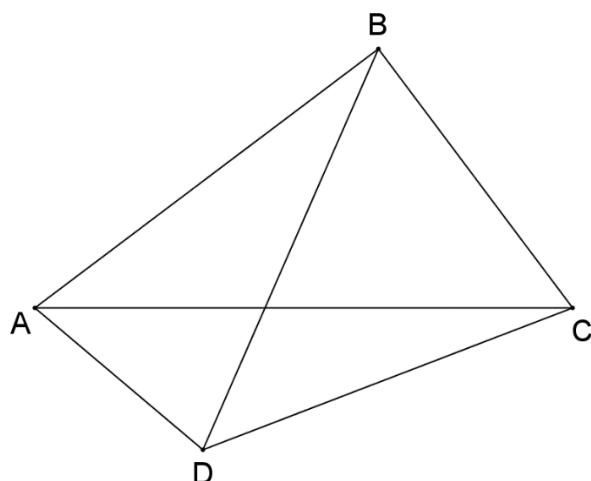
a) $\frac{3a^2}{20}$

b) $\frac{7a^2}{10}$

c) $\frac{9a^2}{20}$

d) $\frac{11a^2}{20}$

e) $\frac{13a^2}{20}$

16) Observe a figura a seguir.

Seja ABC um triângulo retângulo de hipotenusa 6 e com catetos diferentes. Com relação à área 'S' de ABC, pode-se afirmar que

a) será máxima quando um dos catetos for $3\sqrt{2}$.
b) será máxima quando um dos ângulos internos for $30°$.
c) será máxima quando um cateto for o dobro do outro.
d) será máxima quando a soma dos catetos for $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.
e) seu valor máximo não existe.

17) Sejam $A = \{1, 2, 3, \ldots, 4029, 4030\}$ um subconjunto dos números naturais e $B \subset A$, tal que não existem x e y, $x \neq y$, pertencentes a B nos quais x divida y. O número máximo de elementos de B é N. Sendo assim, a soma dos algarismos de N é
a) 8
b) 9
c) 10
d) 11
e) 12

18) O número de divisores positivos de 10^{2015} que são múltiplos de 10^{2000} é
a) 152
b) 196
c) 216
d) 256
e) 276

19) Dado que o número de elementos dos conjuntos A e B são, respectivamente, p e q, analise as sentenças que seguem sobre o número N de subconjuntos não vazios de $A \cup B$.
I - $N = 2^p + 2^q - 1$
II - $N = 2^{pq-1}$
III - $N = 2^{p+q} - 1$
IV - $N = 2^p - 1$, se a quantidade de elementos de $A \cap B$ é p.
Com isso, pode-se afirmar que a quantidade dessas afirmativas que são verdadeiras é:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

20) No triângulo isósceles ABC, $AB = AC = 13$ e $BC = 10$. Em AC marca-se R e S, com $CR = 2x$ e $CS = x$. Paralelo a AB e passando por S traça-se o segmento ST, com T em BC. Por fim, marcam-se U, P e Q, simétricos de T, S e R, nessa ordem, e relativo à altura de ABC com pé sobre BC. Ao analisar a medida inteira de x para que a área do hexágono PQRSTU seja máxima, obtém-se:
a) 5
b) 4
c) 3
d) 2
e) 1

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2014/2015

1) Seja x um número real tal que $x+\frac{3}{x}=9$. Um possível valor de $x-\frac{3}{x}$ é $\sqrt{a}$. Sendo assim, a soma dos algarismos de "a" será:
(A) 11
(B) 12
(C) 13
(D) 14
(E) 15

2) Considere que as pessoas A e B receberão transfusão de sangue. Os aparelhos utilizados por A e B liberam, em 1 minuto, 19 e 21 gotas de sangue, respectivamente, e uma gota de sangue de ambos os aparelhos tem $0,04\ m\ell$. Os aparelhos são ligados simultaneamente e funcionam ininterruptamente até completarem um litro de sangue. O tempo que o aparelho de A levará a mais que o aparelho de B será, em minutos, de aproximadamente:
(A) 125
(B) 135
(C) 145
(D) 155
(E) 165

3) A solução real da equação $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=5$ é:
(A) múltiplo de 3.
(B) par e maior do que 17.
(C) ímpar e não primo.
(D) um divisor de 130.
(E) uma potência de 2.

4) Observe as figuras a seguir.

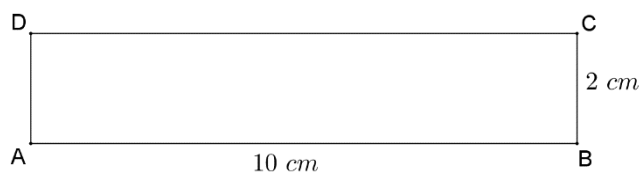
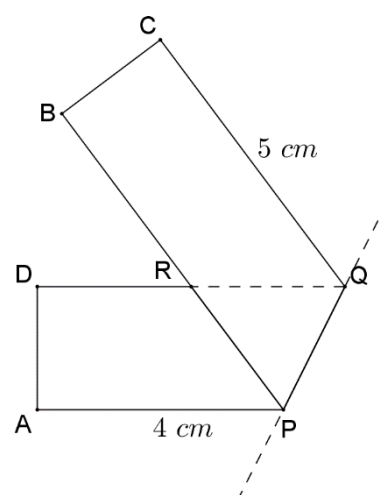



Figura I

Figura II

Uma dobra é feita no retângulo $10\text{ cm} \times 2\text{ cm}$ da figura I, gerando a figura plana II. Essa dobra está indicada pela reta suporte de PQ. A área do polígono $APQCBRD$ da figura II, em cm^2, é:

(A) $8\sqrt{5}$
(B) 20
(C) $10\sqrt{2}$
(D) $\frac{35}{2}$
(E) $\frac{13\sqrt{6}}{2}$

5) Seja ABC um triângulo retângulo de hipotenusa 26 e perímetro 60. A razão entre a área do círculo inscrito e do círculo circunscrito nesse triângulo é, aproximadamente:

(A) $0,035$
(B) $0,055$
(C) $0,075$
(D) $0,095$
(E) $0,105$

6) Considere que ABC é um triângulo retângulo em A, de lados $AC = b$ e $BC = a$. Seja H o pé da perpendicular traçada de A sobre BC, e M o ponto médio de AB, se os segmentos AH e CM cortam-se em P, a razão $\frac{AP}{PH}$ será igual a:

(A) $\frac{a^2}{b^2}$
(B) $\frac{a^3}{b^2}$
(C) $\frac{a^2}{b^3}$
(D) $\frac{a^3}{b^3}$
(E) $\frac{a}{b}$

7) Se a fração irredutível $\frac{p}{q}$ é equivalente ao inverso do número $\frac{525}{900}$, então o resto da divisão do período da dízima $\frac{q}{p+1}$ por 5 é:

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

8) Um número natural N, quando dividido por 3, 5, 7 ou 11, deixa resto igual a 1. Calcule o resto da divisão de N por 1155, e assinale a opção correta.
(A) 17
(B) 11
(C) 7
(D) 5
(E) 1

9) Considere o operador matemático $'*'$ que transforma o número real X em $X+1$ e o operador $'\oplus'$ que transforma o número real Y em $\frac{1}{Y+1}$.
Se $\oplus\left\{*\left[*\left(\oplus\left\{\oplus\left[*\left(\oplus\{*1\}\right)\right]\right\}\right)\right]\right\}=\frac{a}{b}$, onde a e b são primos entre si, a opção correta é:
(A) $\frac{a}{b}=0,27272727\ldots$
(B) $\frac{b}{a}=0,2702702\ldots$
(C) $\frac{2a}{b}=0,540540540\ldots$
(D) $2b+a=94$
(E) $b-3a=6$

10) Analise as afirmativas abaixo.
I) Se $2^x=A$, $A^y=B$, $B^z=C$ e $C^k=4096$, então $x\cdot y\cdot z\cdot k=12$.
II) $t^m+\left(t^m\right)^p=\left(t^m\right)\left(1+\left(t^m\right)^{p-1}\right)$, para quaisquer reais t, m e p não nulos.
III) $r^q+r^{q^w}=\left(r^q\right)\left(1+r^{q^{(w-1)}}\right)$, para quaisquer reais q, r e w não nulos.
IV) Se $\left(10^{100}\right)^x$ é um número que tem 200 algarismos, então x é 2.
Assinale a opção correta.
(A) Apenas as afirmativas I e II são falsas.
(B) Apenas as afirmativas III e IV são falsas.
(C) Apenas as afirmativas I e III são falsas.
(D) Apenas as afirmativas I, II e IV são falsas.
(E) Apenas as afirmativas I, III e IV são falsas.

11) Considere a equação do 2° grau $2014x^2-2015x-4029=0$. Sabendo-se que a raiz não inteira é dada por $\frac{a}{b}$, onde "a" e "b" são primos entre si, a soma dos algarismos de "$a+b$" é:
(A) 7
(B) 9
(C) 11
(D) 13
(E) 15

12) Sobre os números inteiros positivos e não nulos x, y e z, sabe-se:

I) $x \neq y \neq z$

II) $\frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = 2$

III) $\sqrt{z} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Com essas informações, pode-se afirmar que o número $(x-y)\frac{6}{z}$ é:

(A) ímpar e maior do que três.
(B) inteiro e com dois divisores.
(C) divisível por cinco.
(D) múltiplo de três.
(E) par e menor do que seis.

13) Suponha que ABC seja um triângulo isósceles com lados $AC = BC$, e que "L" seja a circunferência de centro "C", raio igual a "3" e tangente ao lado AB. Com relação à área da superfície comum ao triângulo ABC e ao círculo de "L", pode-se afirmar que:
(A) não possui um valor máximo.
(B) pode ser igual a 5π.
(C) não pode ser igual a 4π.
(D) possui um valor mínimo igual a 2π.
(E) possui um valor máximo igual a $4,5\pi$.

14) Considere que N seja um número natural formado apenas por 200 algarismos iguais a 2, 200 algarismos iguais a 1 e 2015 algarismos iguais a zero. Sobre N, pode-se afirmar que:
(A) se forem acrescentados mais 135 algarismos iguais a 1, e dependendo das posições dos algarismos, N poderá ser um quadrado perfeito.
(B) independentemente das posições dos algarismos, N não é um quadrado perfeito.
(C) se forem acrescentados mais 240 algarismos iguais a 1, e dependendo das posições dos algarismos, N poderá ser um quadrado perfeito.
(D) se os algarismos da dezena e da unidade não forem iguais a 1, N será um quadrado perfeito.
(E) se forem acrescentados mais 150 algarismos iguais a 1, e dependendo das posições dos algarismos, N poderá ser um quadrado perfeito.

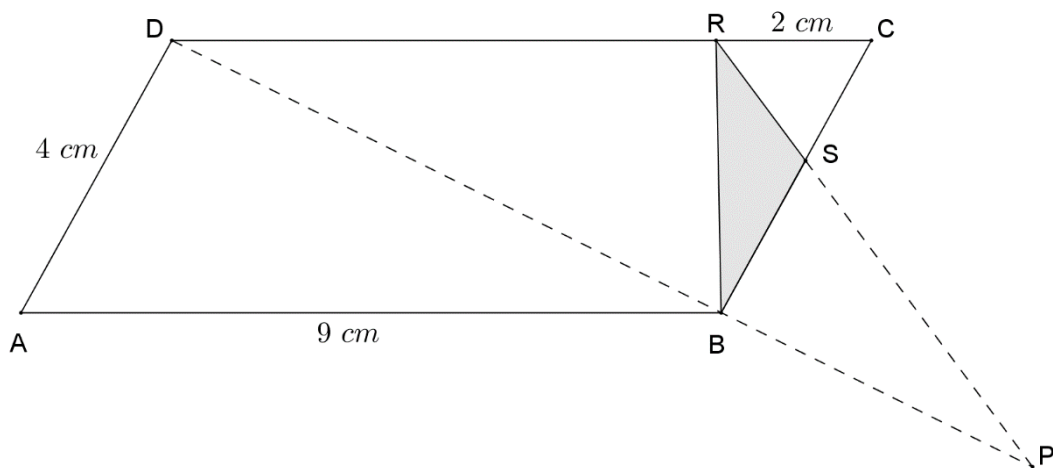
15) A equação $K^2x - Kx = K^2 - 2K - 8 + 12x$, na variável x, é impossível. Sabe-se que a equação na variável y dada por $3ay + \frac{a-114y}{2} = \frac{17b+2}{2}$ admite infinitas soluções. Calcule o valor de $\frac{ab+K}{4}$, e assinale a opção correta.
(A) 0
(B) 1
(C) 3
(D) 4
(E) 5

16) A equação $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ possui três raízes reais. Sejam p e q números reais fixos, onde p é não nulo. Trocando x por $py + q$, a quantidade de soluções reais da nova equação é:
(A) 1
(B) 3
(C) 4
(D) 5
(E) 6

17) Considere que ABC é um triângulo acutângulo inscrito em uma circunferência L. A altura traçada do vértice B intersecta L no ponto D. Sabendo-se que $AD = 4$ e $BC = 8$, calcule o raio de L e assinale a opção correta.
(A) $2\sqrt{10}$
(B) $4\sqrt{10}$
(C) $2\sqrt{5}$
(D) $4\sqrt{5}$
(E) $3\sqrt{10}$

18) Sabendo que $2014^4 = 16452725990416$ e que $2014^2 = 4056196$, calcule o resto da divisão de 16452730046613 por 4058211, e assinale a opção que apresenta esse valor.
(A) 0
(B) 2
(C) 4
(D) 5
(E) 6

19) Sobre o lado BC do quadrado $ABCD$, marcam-se os pontos "E" e "F" tais que $\frac{BE}{BC} = \frac{1}{3}$ e $\frac{CF}{BC} = \frac{1}{4}$. Sabendo-se que os segmentos AF e ED intersectam-se em "P", qual é, aproximadamente, o percentual da área do triângulo BPE em relação à área do quadrado $ABCD$?
(A) 2
(B) 3
(C) 4
(D) 5
(E) 6

20) Observe a figura a seguir.

Na figura, o paralelogramo $ABCD$ tem lados 9 cm e 4 cm. Sobre o lado CD está marcado o ponto R, de modo que $CR = 2\text{ cm}$; sobre o lado BC está marcado o ponto S tal que a área do triângulo BRS seja $\frac{1}{36}$ da área do paralelogramo; e o ponto P é a interseção do prolongamento do segmento RS com o prolongamento da diagonal DB. Nessas condições, é possível concluir que a razão entre as medidas dos segmentos de reta $\frac{DP}{BP}$ vale:

(A) $13,5$
(B) 11
(C) $10,5$
(D) 9
(E) $7,5$

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2013/2014

1) Sejam $P=\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{11}\right)$ e $Q=\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)$. Qual é o valor de $\sqrt{\frac{P}{Q}}$?

(A) $\sqrt{2}$
(B) 2
(C) $\sqrt{5}$
(D) 3
(E) 5

2) Sabendo que ABC é um triângulo retângulo de hipotenusa $BC=a$, qual é o valor máximo da área de ABC?

(A) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$
(B) $\frac{a^2}{4}$
(C) $\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$
(D) $\frac{3a^2}{4}$
(E) $\frac{3a^2}{2}$

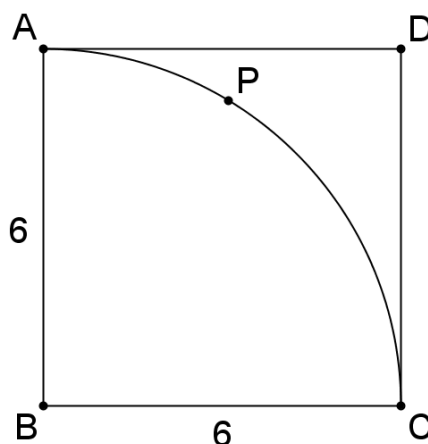
3) Considere um conjunto de 6 meninos com idades diferentes e um outro conjunto com 6 meninas também com idades diferentes. Sabe-se que, em ambos os conjuntos, as idades variam de 1 ano até 6 anos. Quantos casais podem-se formar com a soma das idades inferior a 8 anos?

(A) 18
(B) 19
(C) 20
(D) 21
(E) 22

4) Seja $A\cup B=\{3,5,8,9,10,12\}$ e $B\cap C_X^A=\{10,12\}$ onde A e B são subconjuntos de X, e C_X^A é o complementar de A em relação a X. Sendo assim, pode-se afirmar que o número máximo de elementos de B é

(A) 7
(B) 6
(C) 5
(D) 4
(E) 3

5) Dada a equação $(2x+1)^2(x+3)(x-2)+6=0$, qual é a soma das duas maiores raízes reais desta equação?
(A) 0
(B) 1
(C) $\sqrt{6}-\frac{1}{2}$
(D) $\sqrt{6}$
(E) $\sqrt{6}+1$

6) Analise a figura a seguir.

A figura acima exibe o quadrado $ABCD$ e o arco de circunferência APC com centro em B e raio $AB=6$. Sabendo que o arco AP da figura tem comprimento $\frac{3\pi}{5}$, é correto afirmar que o ângulo PCD mede:
(A) 36°
(B) 30°
(C) 28°
(D) 24°
(E) 20°

7) Qual é o valor da expressão $\left[\left(3^{0,333\ldots}\right)^{27}+2^{2^{1^7}}-\sqrt[5]{239+\sqrt[3]{\frac{448}{7}}}-\left(\sqrt[3]{3}\right)^{3^3}\right]^{\sqrt[7]{92}}$?
(A) $0,3$
(B) $\sqrt[3]{3}$
(C) 1
(D) 0
(E) -1

8) Analise as afirmativas abaixo, em relação ao triângulo ABC.

I - Seja $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$. Se o ângulo interno no vértice A é reto, então $a^2 = b^2 + c^2$.

II - Seja $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$. Se $a^2 = b^2 + c^2$, então o ângulo interno no vértice A é reto.

III - Se M é ponto médio de BC e $AM = \frac{BC}{2}$, ABC é retângulo.

IV – Se ABC é retângulo, então o raio de seu círculo inscrito pode ser igual a três quartos da hipotenusa.

Assinale a opção correta.

(A) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
(B) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(C) Apenas as afirmativas II e IV são verdadeiras.
(D) Apenas as afirmativas I, II e III são verdadeiras.
(E) Apenas as afirmativas II, III e IV são verdadeiras.

9) Assinale a opção que apresenta o conjunto solução da equação $\frac{(-3)}{\sqrt{x^2-4}} - 1 = 0$, no conjunto dos números reais.

(A) $\{-\sqrt{13}, \sqrt{13}\}$
(B) $\{\sqrt{13}\}$
(C) $\{-\sqrt{13}\}$
(D) $\{0\}$
(E) $\varnothing$

10) Seja a, b, x, y números naturais não nulos. Se $a \cdot b = 5$, $k = \frac{2^{(a+b)^2}}{2^{(a-b)^2}}$ e $x^2 - y^2 = \sqrt[5]{k}$, qual é o algarismo das unidades do número $\left(y^x - x^y\right)$?

(A) 2
(B) 3
(C) 5
(D) 7
(E) 8

11) Sabe-se que a média aritmética dos algarismos de todos os números naturais desde 10 até 99, inclusive, é k. Sendo assim, pode-se afirmar que o número $\frac{1}{k}$ é

(A) natural.
(B) decimal exato.
(C) dízima periódica simples.
(D) dízima periódica composta.
(E) decimal infinito sem período.

12) Uma das raízes da equação do 2° grau $ax^2+bx+c=0$, com a, b, c pertencentes ao conjunto dos números reais, sendo $a\neq 0$, é igual a 1. Se $b-c=5a$ então, b^c em função de a é igual a

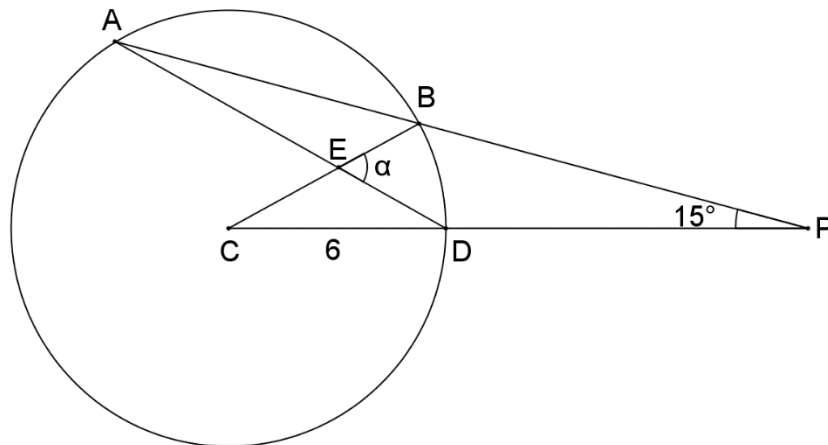
(A) $-3a^2$
(B) 2^a
(C) $2a\cdot 3^a$
(D) $\frac{1}{(2a)^{3a}}$
(E) $\frac{1}{2^{(3a)}\cdot a^{(3+a)}}$

13) Seja ABC um triângulo acutângulo e "L" a circunferência circunscrita ao triângulo. De um ponto Q (diferente de A e de C) sobre o menor arco AC de "L" são traçadas perpendiculares às retas suportes dos lados do triângulo. Considere M, N e P os pés das perpendiculares sobre os lados AB, AC e BC, respectivamente. Tomando $MN=12$ e $PN=16$, qual é a razão entre as áreas dos triângulos BMN e BNP?

(A) $\frac{3}{4}$
(B) $\frac{9}{16}$
(C) $\frac{8}{9}$
(D) $\frac{25}{36}$
(E) $\frac{36}{49}$

14) Sabe-se que o ortocentro H de um triângulo ABC é interior ao triângulo e seja Q o pé da altura relativa ao lado AC. Prolongando BQ até o ponto P sobre a circunferência circunscrita ao triângulo, sabendo-se que $BQ=12$ e $HQ=4$, qual é o valor de QP?

(A) 8
(B) 6
(C) $5,5$
(D) $4,5$
(E) 4

15) Analise a figura a seguir.

Na figura acima, a circunferência de raio 6 tem centro em C. De P traçam-se os segmentos PC, que corta a circunferência em D, e PA, que corta a circunferência em B. Traçam-se ainda os segmentos AD e CD, com interseção em E. Sabendo que o ângulo APC é 15° e que a distância do ponto C ao segmento de reta AB é $3\sqrt{2}$, qual é o valor do ângulo α?

(A) 75°

(B) 60°

(C) 45°

(D) 30°

(E) 15°

16) Considere que $ABCD$ é um trapézio, onde os vértices são colocados em sentido horário, com bases $AB=10$ e $CD=22$. Marcam-se na base AB o ponto P e na base CD o ponto Q, tais que $AP=4$ e $CQ=x$. Sabe-se que as áreas dos quadriláteros $APQD$ e $PBCQ$ são iguais. Sendo assim, pode-se afirmar que a medida x é:

(A) 10

(B) 12

(C) 14

(D) 15

(E) 16

17) O maior inteiro "n", tal que $\frac{n^2+37}{n+5}$ também é inteiro, tem como soma dos seus algarismos um valor igual a

(A) 6

(B) 8

(C) 10

(D) 12

(E) 14

18) Dado que a e b são números reais não nulos, com $b \neq 4a$, e que $\begin{cases} 1+\dfrac{2}{ab}=5 \\ \dfrac{5-2b^2}{4a-b}=4a+b \end{cases}$, qual é o valor de $16a^4b^2-8a^3b^3+a^2b^4$?

(A) 4

(B) $\dfrac{1}{18}$

(C) $\dfrac{1}{12}$

(D) 18

(E) $\dfrac{1}{4}$

19) Sabendo que $2^x \cdot 3^{4y+x} \cdot (34)^y$ é o menor múltiplo de 17 que pode-se obter para x e y inteiros não negativos, determine o número de divisores positivos da soma de todos os algarismos desse número, e assinale a opção correta.

(A) 12

(B) 10

(C) 8

(D) 6

(E) 4

20) Considere, no conjunto dos números reais, a desigualdade $\dfrac{2x^2-28x+98}{x-10} \geq 0$. A soma dos valores inteiros do conjunto solução desta desigualdade, que são menores do que $\dfrac{81}{4}$, é

(A) 172

(B) 170

(C) 169

(D) 162

(E) 157

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2012/2013

1) Para $x = 2013$, qual é o valor da expressão $(-1)^{6x} - (-1)^{x-3} + (-1)^{5x} - (-1)^{x+3} - (-1)^{4x} - (-1)^{2x}$?
(A) -4
(B) -2
(C) 0
(D) 1
(E) 4

2) Analise as afirmativas a seguir.
I) $9,\overline{1234} > 9,123\overline{4}$
II) $\dfrac{222221}{222223} > \dfrac{555550}{555555}$
III) $\sqrt{0,444\ldots} = 0,222\ldots$
IV) $2^{\sqrt[3]{27}} = 64^{0,5}$
Assinale a opção correta.
(A) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
(B) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(C) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
(D) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
(E) Apenas as afirmativas II e IV são verdadeiras.

3) Um trapézio isósceles tem lados não paralelos medindo $10\sqrt{3}$. Sabendo que a bissetriz interna da base maior contém um dos vértices do trapézio e é perpendicular a um dos lados não paralelos, qual é a área desse trapézio?
(A) $75\sqrt{3}$
(B) $105\sqrt{3}$
(C) $180\sqrt{3}$
(D) $225\sqrt{3}$
(E) $275\sqrt{3}$

4) Os números $(35041000)_7$, $(11600)_7$ e $(62350000)_7$ estão na base 7. Esses números terminam, respectivamente, com 3, 2 e 4 zeros. Com quantos zeros terminará o número na base decimal $n = 21^{2012}$, na base 7?
(A) 2012
(B) 2013
(C) 2014
(D) 2015
(E) 2016

5) No retângulo $ABCD$, o lado $BC = 2AB$. O ponto P está sobre o lado AB e $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{4}$. Traça-se a reta $\overleftrightarrow{PS}$ com S no interior de $ABCD$ e $C \in \overleftrightarrow{PS}$. Marcam-se ainda, $M \in AD$ e $N \in BC$ de modo que $MPNS$ seja um losango. O valor de $\frac{BN}{AM}$ é:

(A) $\frac{3}{7}$

(B) $\frac{3}{11}$

(C) $\frac{5}{7}$

(D) $\frac{5}{11}$

(E) $\frac{7}{11}$

6) O número $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (\ldots) \cdot (k-1) \cdot k$ é formado pelo produto dos k primeiros números naturais não nulos. Qual é o menor valor possível de k para que $\frac{N}{7^{17}}$ seja um número natural, sabendo que k é ímpar e não é múltiplo de 7?

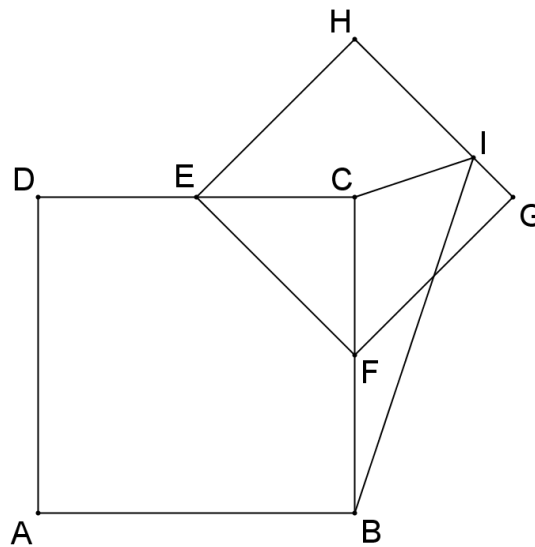
(A) 133
(B) 119
(C) 113
(D) 107
(E) 105

7) Qual é o menor valor positivo de $2160x + 1680y$, sabendo que x e y são números inteiros?

(A) 30
(B) 60
(C) 120
(D) 240
(E) 480

8) Um número inteiro possui exatamente 70 divisores. Qual é o menor valor possível para $|N + 3172|$?

(A) 2012
(B) 3172
(C) 5184
(D) 22748
(E) 25920

9) Observe a figura a seguir.

A figura acima apresenta um quadrado $ABCD$ de lado 2. Sabe-se que E e F são os pontos médios dos lados DC e CB, respectivamente. Além disso, $EFGH$ também forma um quadrado e I está sobre o lado GH, de modo que $GI = \frac{GH}{4}$. Qual é a área do triângulo BCI?

(A) $\frac{7}{8}$

(B) $\frac{6}{7}$

(C) $\frac{5}{6}$

(D) $\frac{4}{5}$

(E) $\frac{3}{4}$

10) Determine, no conjunto dos números reais, a soma dos valores de x na igualdade:

$$\left(\frac{1}{1+\frac{x}{x^2-3}}\right)\cdot\left(\frac{2}{x-\frac{3}{x}}\right)=1.$$

(A) $-\frac{2}{3}$

(B) $-\frac{1}{3}$

(C) 1

(D) 2

(E) $\frac{11}{3}$

11) Em dois triângulos, T_1 e T_2, cada base é o dobro da respectiva altura. As alturas desses triângulos, h_1 e h_2, são números ímpares positivos. Qual é o conjunto dos valores possíveis de h_1 e h_2, de modo que a área de $T_1 + T_2$ seja equivalente à área de um quadrado de lado inteiro?
(A) $\varnothing$
(B) unitário
(C) finito
(D) $\{3, 5, 7, 9, 11, \ldots\}$
(E) $\{11, 17, 23, 29, \ldots\}$

12) Qual é o total de números naturais em que o resto é o quadrado do quociente na divisão por 26?
(A) zero.
(B) dois.
(C) seis.
(D) treze.
(E) vinte e cinco.

13) Na fabricação de um produto é utilizado o ingrediente A ou B. Sabe-se que, para cada 100 quilogramas (kg) do ingrediente A devem ser utilizados 10 kg do ingrediente B. Se, reunindo x kg do ingrediente A com y kg do ingrediente B, resulta 44000 gramas do produto, então
(A) $y^x = 2^{60}$
(B) $\sqrt{x \cdot y} = 5\sqrt{10}$
(C) $\sqrt[10]{y^x} = 256$
(D) $\sqrt[4]{x^y} = 20$
(E) $\sqrt{\frac{y}{x}} = 2\sqrt{5}$

14) Seja $P(x) = 2x^{2012} + 2012x + 2013$. O resto $r(x)$ da divisão de $P(x)$ por $d(x) = x^4 + 1$ é tal que $r(-1)$ é:
(A) -2
(B) -1
(C) 0
(D) 1
(E) 2

15) Uma divisão de números naturais está representada a seguir.

$$\begin{array}{c|c} D & d \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

$D = 2012$ é o dividendo, d é o divisor, q é o quociente e r é o resto. Sabe-se que $0 \neq d = 21$ ou $q = 21$. Um resultado possível para $r + d$ ou $r + q$ é:
(A) 92
(B) 122
(C) 152
(D) 182
(E) 202

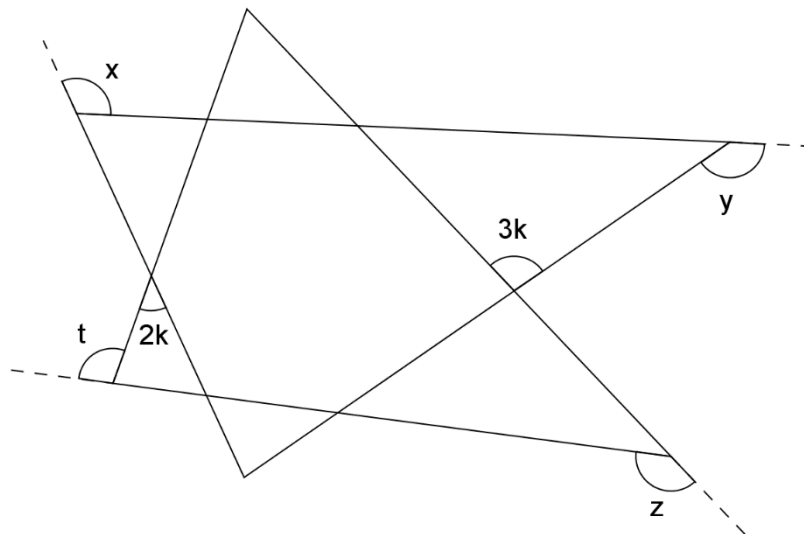
16) Seja $a^3b - 3a^2 - 12b^2 + 4ab^3 = 287$. Considere que a e b são números naturais e que $ab > 3$. Qual é o maior valor natural possível para a expressão $a + b$?
(A) 7
(B) 11
(C) 13
(D) 17
(E) 19

17) Sabendo que $A = \dfrac{3+\sqrt{6}}{5\sqrt{3} - 2\sqrt{12} - \sqrt{32} + \sqrt{50}}$, qual é o valor de $\dfrac{A^2}{\sqrt[6]{A^7}}$?
(A) $\sqrt[5]{3^4}$
(B) $\sqrt[7]{3^6}$
(C) $\sqrt[8]{3^5}$
(D) $\sqrt[10]{3^7}$
(E) $\sqrt[12]{3^5}$

18) Somando todos os algarismos até a posição 2012 da parte decimal da fração irredutível $\dfrac{5}{7}$ e, em seguida, dividindo essa soma por 23, qual será o resto dessa divisão?
(A) 11
(B) 12
(C) 14
(D) 15
(E) 17

19) Sabendo que n é natural não nulo, e que $x\#y = x^y$, qual é o valor de $(-1)^{n^4+n+1} + \left(\frac{2\#(2\#(2\#2))}{((2\#2)\#2)\#2}\right)$?

(A) 127
(B) 128
(C) 255
(D) 256
(E) 511

20) Observe a figura a seguir.

Na figura acima, sabe-se que $k > 36^\circ$. Qual é o menor valor natural da soma $x+y+z+t$, sabendo que tal soma deixa resto 4, quando dividida por 5, e resto 11, quando dividida por 12?

(A) 479°
(B) 539°
(C) 599°
(D) 659°
(E) 719°

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2011/2012

1) É correto afirmar que o número $5^{2011} + 2 \cdot 11^{2011}$ é múltiplo de
(A) 13
(B) 11
(C) 7
(D) 5
(E) 3

2) A solução real da equação $\frac{7}{x-1} - \frac{8}{x+1} = \frac{9}{x^2-1}$ é um divisor de
(A) 12
(B) 14
(C) 15
(D) 16
(E) 19

3) A soma das raízes de uma equação do 2° grau é $\sqrt{2}$ e o produto dessas raízes é $0,25$. Determine o valor de $\frac{a^3 - b^3 - 2ab^2}{a^2 - b^2}$, sabendo que 'a' e 'b' são as raízes dessa equação do 2° grau e $a > b$, e assinale a opção correta.
(A) $\frac{1}{2}$
(B) $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$
(C) -1
(D) $\sqrt{2} + \frac{1}{4}$
(E) $\sqrt{2} - \frac{1}{4}$

4) Sejam 'a', 'b' e 'c' números reais não nulos tais que $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = p$, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = q$ e $ab + ac + bc = r$. O valor de $q^2 + 6q$ é sempre igual a
(A) $\frac{p^2r^2 + 9}{4}$
(B) $\frac{p^2r^2 - 9p}{12}$
(C) $p^2r^2 - 9$
(D) $\frac{p^2r^2 - 10}{4r}$

(E) $p^2r^2 - 12p$

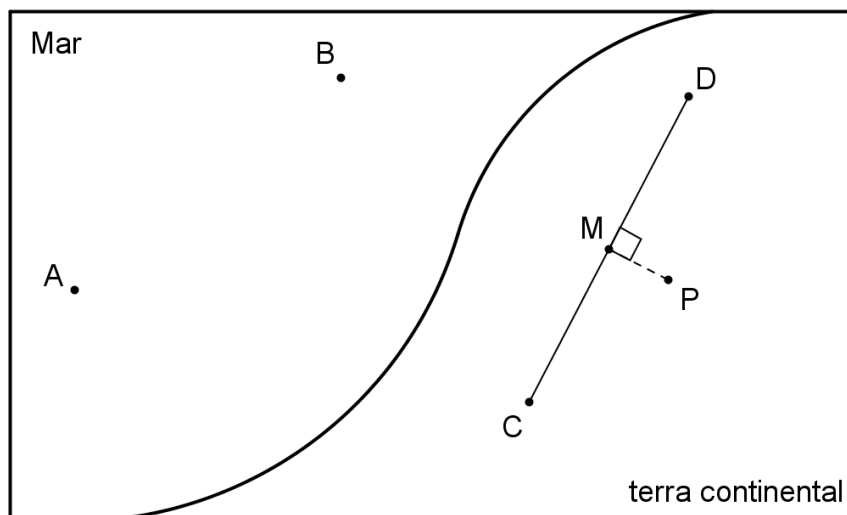
5) A quantidade de soluções reais e distintas da equação $3x^3 - \sqrt{33x^3 + 97} = 5$ é
(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 5
(E) 6

6) Num paralelogramo $ABCD$ de altura $CP = 3$, a razão $\frac{AB}{BC} = 2$. Seja $'M'$ o ponto médio de AB e $'P'$ o pé da altura de $ABCD$ baixada sobre o prolongamento de AB, a partir de C. Sabe-se que a razão entre as áreas dos triângulos MPC e ADM é $\frac{S(MPC)}{S(ADM)} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$. A área do triângulo BPC é igual a
(A) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$
(B) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$
(C) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$
(D) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
(E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7) O valor de $\sqrt{9^{0,5} \times 0,333\ldots + \sqrt[7]{4 \times \sqrt{0,0625}}} - \frac{(3,444\ldots + 4,555\ldots)}{\sqrt[3]{64}}$ é
(A) 0
(B) $\sqrt{2}$
(C) $\sqrt{3} - 2$
(D) $\sqrt{2} - 2$
(E) 1

8) Dado um quadrilátero convexo em que as diagonais são perpendiculares, analise as afirmações abaixo.
I – Um quadrilátero assim formado sempre será um quadrado.
II – Um quadrilátero assim formado sempre será um losango.
III – Pelo menos uma das diagonais de um quadrilátero assim formado divide esse quadrilátero em dois triângulos isósceles.
Assinale a opção correta.
(A) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(B) Apenas a afirmativa II é verdadeira.

(C) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
(D) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
(E) Todas as afirmativas são falsas.

9) Observe a figura a seguir

A figura acima mostra, num mesmo plano, duas ilhas representadas pelos pontos 'A' e 'B' e os pontos 'C', 'D', 'M' e 'P' fixados no continente por um observador. Sabe-se que $A\hat{C}B = A\hat{D}B = A\hat{P}B = 30^\circ$, 'M' é o ponto médio de $CD = 100\text{ m}$ e que $PM = 10\text{ m}$ é perpendicular a CD. Nessas condições, a distância entre as ilhas é de:

(A) 150 m
(B) 130 m
(C) 120 m
(D) 80 m
(E) 60 m

10) Numa pesquisa sobre a leitura dos jornais A e B, constatou-se que 70% dos entrevistados leem o jornal A e 65% leem o jornal B. Qual o percentual máximo dos que leem os jornais A e B?

(A) 35%
(B) 50%
(C) 65%
(D) 80%
(E) 95%

11) Analise as afirmações abaixo referentes a números reais simbolizados por 'a', 'b' ou 'c'.

I – A condição $a \cdot b \cdot c > 0$ garante que 'a', 'b' e 'c' não são, simultaneamente, iguais a zero, bem como a condição $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

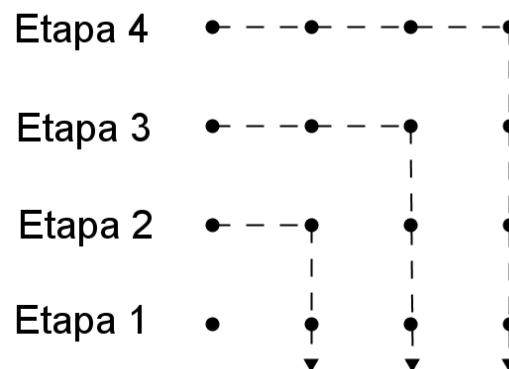
II – Quando o valor absoluto de 'a' é menor do que $b > 0$, é verdade que $-b < a < b$.

III – Admitindo que $b > c$, é verdadeiro afirmar que $b^2 > c^2$.

Assinale a opção correta.

(A) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(B) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
(C) Apenas a afirmativa III é verdadeira.

(D) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
(E) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.

12) Observe a figura abaixo.

A figura apresentada foi construída por etapas. A cada etapa, acrescentam-se pontos na horizontal e na vertical, com uma unidade de distância, exceto na etapa 1, iniciada com 1 ponto.
Continuando a compor a figura com estas etapas e buscando um padrão, é correto concluir que
(A) cada etapa possui quantidade ímpar de pontos e a soma desses $'n'$ primeiros ímpares é n^2.
(B) a soma de todos os números naturais começando do 1 até $'n'$ é sempre um quadrado perfeito.
(C) a soma dos pontos das $'n'$ primeiras etapas é $2n^2-1$.
(D) cada etapa $'n'$ tem $3n-2$ pontos.
(E) cada etapa $'n'$ tem $2n+1$ pontos.

13) O número real $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$ é igual a
(A) $5-\sqrt{3}$
(B) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$
(C) $3-\sqrt{2}$
(D) $\sqrt{13-3\sqrt{3}}$
(E) 2

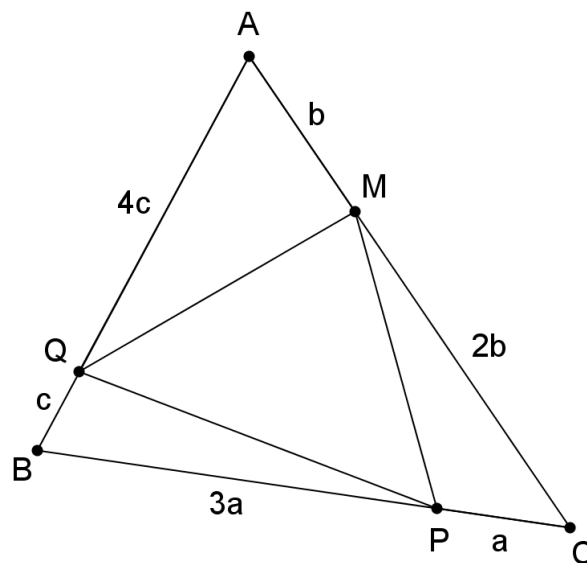
14) A divisão do inteiro positivo $'N'$ por 5 tem quociente $'q_1'$ e resto 1. A divisão de $'4q_1'$ por 5 tem quociente $'q_2'$ e resto 1. A divisão de $'4q_2'$ por 5 tem quociente $'q_3'$ e resto 1. Finalmente, dividindo $'4q_3'$ por 5, o quociente é $'q_4'$ e o reto é 1. Sabendo que $'N'$ pertence ao intervalo aberto $(621,1871)$, a soma dos algarismos de $'N'$ é
(A) 18
(B) 16
(C) 15
(D) 13
(E) 12

15) Assinale a opção que apresenta o único número que NÃO é inteiro.
(A) $\sqrt[6]{1771561}$
(B) $\sqrt[4]{28561}$
(C) $\sqrt[6]{4826807}$
(D) $\sqrt[4]{331776}$
(E) $\sqrt[6]{148035889}$

16) A expressão $\sqrt[3]{-(x-1)^6}$ é um número real. Dentre os números reais que essa expressão pode assumir, o maior deles é:
(A) 2
(B) $\sqrt{2}-1$
(C) $2-\sqrt{2}$
(D) 1
(E) 0

17) Sejam $A=\left[7^{2011},11^{2011}\right]$ e $B=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=(1-t)\cdot 7^{2011}+t\cdot 11^{2011}\text{ com } t\in[0,1]\right\}$, o conjunto $A-B$ é
(A) $A\cap B$
(B) $B-\left\{11^{2011}\right\}$
(C) $A-\left\{7^{2011}\right\}$
(D) A
(E) $\varnothing$

18) Um aluno estudava sobre polígonos convexos e tentou obter dois polígonos de $'N'$ e $'n'$ lados $(N\neq n)$, e com $'D'$ e $'d'$ diagonais, respectivamente, de modo que $N-n=D-d$. A quantidade de soluções corretas que satisfazem essas condições é
(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) indeterminada.

19) Considere a figura abaixo.

A razão $\frac{S(MPQ)}{S(ABC)}$, entre as áreas dos triângulos MPQ e ABC, é

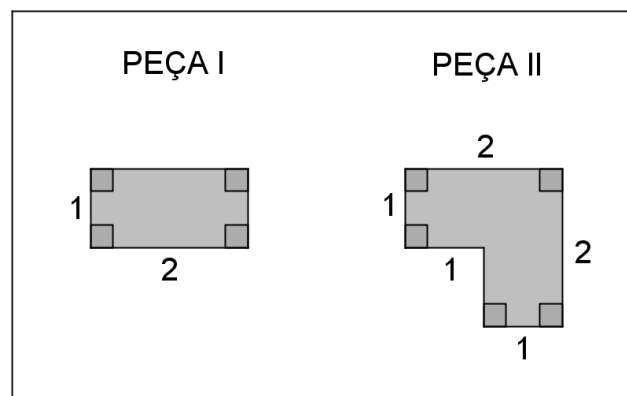
(A) $\frac{7}{12}$

(B) $\frac{5}{12}$

(C) $\frac{7}{15}$

(D) $\frac{8}{15}$

(E) $\frac{7}{8}$

20) Observe a ilustração a seguir.

Qual a quantidade mínima de peças necessárias para revestir, sem falta ou sobra, um quadrado de lado 5, utilizando as peças acima?

(A) 12

(B) 11
(C) 10
(D) 9
(E) 8

CAPÍTULO 2
RESPOSTAS E CLASSIFICAÇÃO DAS QUESTÕES

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 2015/2016

1) b (Inequação produto-quociente)
2) e (Sistemas lineares)
3) a (Bases de numeração)
4) c (Regra de três)
5) c (Médias)
6) c (Geometria Plana - relações métricas no triângulo retângulo)
7) b (Geometria Plana - comprimento da circunferência)
8) b (Geometria Plana - áreas de regiões circulares)
9) d (Equações polinomiais)
10) b (Raciocínio lógico)
11) d (Potências e raízes)
12) a (Sistemas de numeração)
13) c (Geometria Plana - Triângulos – pontos notáveis)
14) b (Geometria Plana – Áreas)
15) a (Geometria Plana – Áreas)
16) e (Geometria Plana – Áreas)
17) a (Múltiplos e divisores)
18) d (Múltiplos e divisores)
19) a (Conjuntos)
20) b (Geometria Plana – Áreas)

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 2014/2015

1) E (Fatoração)
2) A (Razões e proporções)
3) D (Equações irracionais)
4) D (Áreas)
5) D (Áreas)
6) A (Relações métricas no triângulo qualquer)
7) B (Números racionais)
8) E (MMC)
9) C (Números racionais)
10) B (Potências e raízes)
11) D (Equação do 2° grau)
12) E (Sistemas lineares)
13) A (Áreas)
14) B (Divisibilidade)
15) D (Equação do 1º grau)
16) B (Equação polinomial)
17) C (Relações métricas no triângulo qualquer)

18) A (Fatoração)
19) D (Áreas)
20) C (Áreas)

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 2013/2014

1) B (Operações com frações)
2) B (Triângulo retângulo – área)
3) D (Contagem)
4) B (Conjuntos)
5) C (Equações redutíveis ao 2º grau)
6) A (Circunferência – comprimentos e ângulos)
7) C (Potências e raízes)
8) D (Triângulos retângulos)
9) E (Equações irracionais)
10) E (Múltiplos e divisores)
11) D (Contagem e médias)
12) D (Equação do 2° grau e potenciação)
13) A (Triângulos – pontos notáveis e área)
14) E (Triângulos – pontos notáveis)
15) B (Ângulos na circunferência)
16) A (Área de trapézios)
17) D (Múltiplos e divisores)
18) E (Sistemas não lineares)
19) D (Potenciação e múltiplos e divisores)
20) D (Inequação produto-quociente)

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 2012/2013

1) A (Potências e raízes)
2) E (Números racionais)
3) D (Quadriláteros)
4) A (Sistemas de numeração)
5) B (Quadriláteros)
6) D (Múltiplos e divisores)
7) D (MDC e MMC)
8) A (Múltiplos e divisores)
9) E (Áreas)
10) C (Equações fracionárias)
11) A (Divisibilidade e congruências)
12) C (Operações com números naturais)
13) C (Misturas)
14) B (Polinômios)
15) C (Operações com números naturais)
16) A (Produtos notáveis e fatoração)
17) E (Racionalização)
18) C (Números racionais)

19) C (Potências e raízes)
20) C (Triângulos – ângulos, congruência, desigualdades e pontos notáveis)

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 2011/2012

1) E (Divisibilidade e congruências)
2) A (Equações fracionárias)
3) E (Produtos notáveis e fatoração)
4) C (Produtos notáveis e fatoração)
5) A (Equações irracionais)
6) B (Áreas)
7) D (Potências e raízes)
8) E (Quadriláteros)
9) B (Ângulos na circunferência e arco capaz)
10) C (Conjuntos)
11) D (Números reais)
12) A (Sequências)
13) B (Racionalização)
14) D (Múltiplos e divisores)
15) C (Divisibilidade e congruências)
16) E (Potências e raízes)
17) E (Função do 1° grau)
18) A (Polígonos – ângulos e diagonais)
19) B (Áreas)
20) D (Divisibilidade e congruências)

QUADRO RESUMO DAS QUESTÕES DE 1984 A 2016

ASSUNTO	F8	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	TOTAL	PERCENTUAL
Raciocínio lógico									1		1							2	1														1	6	0,9%
Conjuntos		1	2	2	1	1	1		1	1		1			2	1		1					1	1	1			1	1		1		1	22	3,3%
Operações com números naturais e inteiros	1								1	1			1									1				1	1			2				8	1,2%
Números racionais	1				1					1		1	2	1	1		1				1									2	1	2		14	2,1%
Conjuntos numéricos e números reais						2					1					2									1				1					7	1,1%
Sistemas de numeração	1					1		1		1				1			1			1					1		2			1			2	12	1,8%
Múltiplos e divisores	2	1		1				1	1	1			1						2		1	1		2		1	1	1	1	2	3		2	23	3,5%
Divisibilidade e congruência		1			1						1		1					1			1	2					2	1	3	1		1		16	2,4%
Função parte inteira																												1						1	0,2%
MDC/MMC	1				1			1			1							1	2	1	1		2		1	2				1		1		15	2,3%
Razões e proporções		2			1		1		1				2		2		1	1		1	1		1		2		1					1		18	2,7%
Regra de três	3												1																				1	2	0,3%
Porcentagem			1							1		1		1			1	1			1			1		2								10	1,5%
Divisão em partes proporcionais e regra de sociedade			1	1																		1		1	1									5	0,8%
Operações com mercadorias				1			1	1			1		1	1	1			1		1			1					1						11	1,7%
Juros simples e compostos						1		1	1		1	1				1							1		1									8	1,2%
Misturas	1				1											1			1								1			1				5	0,8%
Médias		1	1					1				1						1	1					1									1	8	1,2%
Contagem e calendário					1					1				1						2					1						2			8	1,2%
Problemas tipo torneira	1		1								1												1	1	1									5	0,8%
Sistema métrico			1	1			1				1		1	1																				6	0,9%
Potências e raízes	1	3	2	1	2	1	1	1	1			1		1	1	1	3	3			2	1		1		1	1		2	2	1	1	1	35	5,3%
Produtos notáveis e fatoração	2	1	1	1	1	1	1		1	1	1		2		2	1		1				2	1	3	2	1			2	1		2		29	4,4%
Racionalização e radical duplo	2			1	1	1	1	1	1		1			1		1			1	1		1				1			1	1				15	2,3%
Equação do 2º grau	5	1	2	1	1	2	1	1	1			2	1			1	1		1		1	2			1	1	1				1	1		24	3,6%
Função quadrática	1	1	1		1	1	1	1			1				1	1				2		1	1	1		1	1							16	2,4%
Equações fracionárias										1									1							1		1	1	1				6	0,9%
Equações biquadradas e redutíveis ao 2º grau			1	1						4	1	2		1	2		1		1		1		1		1						1			18	2,7%
Equações e inequações irracionais	3	1					1		1			1		1						1	1			1		1		1	1		1	1		13	2,0%
Polinômios e equações polinomiais		1	1	3	2	1		1				1									1	1						2		1		1	1	17	2,6%
Sequências																													1					1	0,2%
Função do 1º grau				1																1									1					3	0,5%
Equação do 1º grau e problemas do 1º grau	1	1						1			1			1	1		2		1													1		9	1,4%
Sistemas lineares e problemas relacionados		1	2			1	2			1	1	1		1		2	1	1	1	1	2		1	1		1	1					1	1	24	3,6%
Sistemas não lineares e problemas relacionados	1	1		1		1	1	1	1											1				1		1		3			1			13	2,0%
Inequações											1	1		1						1								1						5	0,8%
Inequações produto-quociente	1	1		1	2		1	1	1						1							1	1				1				1		1	13	2,0%
Desigualdades																												1						1	0,2%
Fundamentos e ângulos																									1									1	0,2%
Triângulos - ângulos, congruência e desigualdades			1	1					1			1	1	1	1	1	2	2	1				1							1				15	2,3%
Triângulos - pontos notáveis												1	1	1		1					1						1	1			2		1	10	1,5%
Triângulos retângulos							1			1	1		1			1						1	1			1					1		1	10	1,5%
Triângulos - semelhança e relações métricas	2	1	1	2	2	1	1	1		1					1	2					2		1		1		1					2		20	3,0%
Quadriláteros	1		1	2		1	1			1		1		1				1			1	1		1		1	1	1	1	2				18	2,7%
Polígonos - ângulos e diagonais	2		2		1	1		1	1		1	1		1	1			1					2						1					14	2,1%
Polígonos regulares - relações métricas				1				1	1		1		1			1	1				1		2	1										11	1,7%
Circunferência - posições relativas e segmentos tangentes	1			1					1		1		1			1				1	1			1	1	1	1	1						12	1,8%
Arco capaz, ângulos e comprimentos na circunferência		1			1	1			1	1				1			1	1		2					1	1	1		1		2		1	17	2,6%
Circunferência - relações métricas e potência de ponto	3	2					1	1				1	1		2				1	1		1												11	1,7%
Áreas	3	3	3	1	4	2	2	2	2	2	1	1	1	2	1	1	4	1	5	2		3	1	2	2	1	2	3	2	1	2	5	5	69	10,5%
TOTAL POR PROVA	**40**	**25**	**25**	**25**	**25**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**660**	**100,0%**
Aritmética	11	6	7	6	7	5	4	6	6	7	8	5	10	6	6	5	4	9	7	6	6	5	7	7	10	6	8	5	6	10	7	5	8	210	31,82%
Álgebra	17	12	10	11	10	9	10	8	7	7	7	9	3	7	8	7	8	5	6	8	8	9	5	8	4	9	5	9	9	6	6	8	4	242	36,67%
Geometria Plana	12	7	8	8	8	6	6	6	7	6	5	6	7	7	6	8	8	6	7	6	6	6	8	5	6	5	7	6	5	4	7	7	8	208	31,52%

CLASSIFICAÇÃO DAS QUESTÕES POR ASSUNTO

ARITMÉTICA

RACIOCÍNIO LÓGICO: 2016-10; 2002-14; 2001-1; 2001-6; 1994-20; 1991-2;

CONJUNTOS: 2016-19; 2014-4; 2012-10; 2011-11; 2008-15; 2007-6; 2006-3; 2001-15; 1999-4; 1998-9; 1998-17; 1995-18; 1992-4; 1991-3; 1989-14; 1988-5; 1987-6; 1986-1; 1986-2; 1985-1; 1985-18; 1984-1

OPERAÇÕES COM NÚMEROS NATURAIS E INTEIROS: 2013-12; 2013-15; 2010-14; 2009-13; 2005-2; 1996-14; 1992-1; 1991-1; FB-16

NÚMEROS RACIONAIS: 2015-7; 2015-9; 2014-1; 2013-2; 2013-18; 2004-8; 2000-4; 1998-20; 1997-11; 1996-19; 1996-20; 1995-16; 1992-13; 1987-7; FB-12

CONJUNTOS NUMÉRICOS E NÚMEROS REAIS: 2012-11; 2008-20; 1999-10; 1999-15; 1994-11; 1988-1; 1988-2

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO: 2016-3; 2016-12; 2013-4; 2010-3; 2010-13; 2008-5; 2003-18; 2000-3; 1997-3; 1992-6; 1990-9; 1988-3; FB-23

MÚLTIPLOS E DIVISORES: 2016-17; 2016-18; 2014-10; 2014-17; 2014-19; 2013-6; 2013-8; 2012-14; 2011-4; 2010-8; 2009-18; 2007-11; 2007-17; 2005-10; 2004-4; 2002-6; 2002-11; 1996-11; 1992-14; 1991-4; 1990-11; 1986-4; 1984-7; FB-7; FB-13

DIVISIBILIDADE E CONGRUÊNCIA: 2015-14; 2013-11; 2012-1; 2012-15; 2012-20; 2011-5; 2010-5; 2010-15; 2005-13; 2005-16; 2004-9; 2001-19; 1996-18; 1994-9; 1987-2; 1984-2

FUNÇÃO PARTE INTEIRA: 2011-8;

MDC E MMC: 2015-8; 2013-7; 2009-4; 2009-14; 2008-11; 2006-2; 2006-9; 2004-5; 2003-4; 2002-2; 2002-4; 2001-3; 1994-5; 1990-8; 1987-4; FB-38

RAZÕES E PROPORÇÕES: 2015-2; 2010-19; 2008-12; 2008-18; 2006-12; 2004-16; 2003-13; 2001-5; 2000-5; 1998-7; 1998-15; 1996-6; 1996-17; 1991-6; 1989-9; 1987-1; 1984-4; 1984-21

REGRA DE TRÊS: 2016-4; 1996-16; FB-9; FB-25; FB-30

PORCENTAGEM: 2009-10; 2009-15; 2007-4; 2004-6; 2001-16; 2000-19; 1997-2; 1995-3; 1992-20; 1985-6

DIVISÃO EM PARTES PROPORCIONAIS E REGRA DE SOCIEDADE: 2008-14; 2007-10; 2005-14; 1986-11; 1985-11

OPERAÇÕES COM MERCADORIAS: 2011-10; 2006-19; 2003-15; 2001-11; 1998-6; 1997-4; 1996-12; 1994-16; 1990-16; 1989-8; 1986-6

JUROS SIMPLES E COMPOSTOS: 2008-4; 2006-15; 1999-8; 1995-8; 1994-3; 1991-7; 1990-6; 1988-4

MISTURAS: 2013-13; 2010-7; 2002-7; 1999-3; 1987-3; FB-39

MÉDIAS: 2016-5; 2007-19; 2002-9; 2001-9; 1995-14; 1990-10; 1985-25; 1984-3

CONTAGEM E CALENDÁRIO: 2014-3; 2014-11; 2008-9; 2003-1; 2003-9; 1997-5; 1992-5; 1987-9

PROBLEMAS TIPO TORNEIRA: 2008-16; 2007-3; 2006-14; 1994-10; 1985-3; FB-37

SISTEMA MÉTRICO: 1997-10; 1996-10; 1994-13; 1989-13; 1986-13; 1985-23

ÁLGEBRA

POTÊNCIAS E RAÍZES: 2016-11; 2015-10; 2014-7; 2013-1; 2013-19; 2012-7; 2012-16; 2010-18; 2009-8; 2007-7; 2005-9; 2004-11; 2004-14; 2001-4; 2001-13; 2001-14; 2000-6; 2000-9; 2000-11; 1999-5; 1998-16; 1997-15; 1995-12; 1991-5; 1990-2; 1989-5; 1988-7; 1987-16; 1987-24; 1986-7; 1985-2; 1985-15; 1984-5; 1984-6; 1984-15; FB-3

PRODUTOS NOTÁVEIS E FATORAÇÃO: 2015-1; 2015-18; 2013-16; 2012-3; 2012-4; 2009-12; 2008-1; 2008-3; 2007-8; 2007-9; 2007-12; 2006-16; 2005-12; 2005-15; 2001-7; 1999-12; 1998-10; 1998-14; 1996-3; 1996-15; 1994-19; 1992-8; 1991-13; 1989-10; 1988-14; 1987-17; 1986-16; 1985-8; 1984-12; FB-8; FB-33

RACIONALIZAÇÃO E RADICAL DUPLO: 2013-17; 2012-13; 2009-19; 2005-11; 2003-3; 2002-5; 1999-2; 1997-18; 1994-8; 1991-10; 1990-14; 1989-11; 1988-6; 1987-5; 1986-9; FB-10; FB-14

EQUAÇÃO DO 2° GRAU: 2015-11; 2014-12; 2010-6; 2009-20; 2008-8; 2005-3; 2005-19; 2004-12; 2002-15; 2000-15; 1999-20; 1996-4; 1995-2; 1995-15; 1991-12; 1990-4; 1989-7; 1988-8; 1988-11; 1987-20; 1986-3; 1985-4; 1985-17; 1984-10; FB-11; FB-17; FB-28; FB-29; FB-32

FUNÇÃO QUADRÁTICA: 2010-12; 2009-16; 2007-14; 2006-6; 2005-17; 2003-10; 2003-14; 1999-18; 1998-19; 1994-2; 1990-18; 1989-17; 1988-13; 1987-21; 1985-13; 1984-8; FB-36

EQUAÇÕES FRACIONÁRIAS: 2013-10; 2012-2; 2011-20; 2009-3; 2002-17; 1992-12;

EQUAÇÕES BIQUADRADAS E REDUTÍVEIS AO 2° GRAU: 2014-5; 2008-10; 2006-20; 2004-15; 2002-19; 2000-17; 1998-3; 1998-8; 1997-14; 1995-17; 1995-20; 1994-15; 1992-10; 1992-11; 1992-16; 1992-18; 1986-15; 1985-10

EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES IRRACIONAIS: 2015-3; 2014-9; 2012-5; 2011-12; 2009-7; 2007-13; 2004-2; 2003-16; 1997-7; 1995-7; 1991-8; 1989-12; 1984-11; FB-24; FB-34; FB-40

POLINÔMIOS E EQUAÇÕES POLINOMIAIS: 2016-9; 2015-16; 2013-14; 2011-2; 2011-13; 2005-4; 2004-19; 1995-4; 1990-20; 1988-12; 1987-14; 1987-25; 1986-8; 1986-10; 1986-14; 1985-19; 1984-13

SEQUÊNCIAS: 2012-12;

FUNÇÃO DO 1° GRAU: 2012-17; 2003-19; 1986-12

EQUAÇÃO DO 1° GRAU E PROBLEMAS DO 1º GRAU: 2015-15; 2002-18; 2000-7; 2000-10; 1998-4; 1997-1; 1994-14; 1990-7; 1984-16; FB-15

SISTEMAS LINEARES E PROBLEMAS RELACIONADOS: 2016-2; 2015-12; 2010-4; 2009-1; 2007-1; 2006-11; 2004-1; 2004-17; 2003-8; 2002-3; 2001-18; 2000-16; 1999-11; 1999-17; 1997-17; 1995-11; 1994-12; 1992-17; 1989-4; 1989-15; 1988-10; 1985-9; 1985-22; 1984-14

SISTEMAS NÃO LINEARES E PROBLEMAS RELACIONADOS: 2014-18; 2011-15; 2011-16; 2011-18; 2009-2; 2007-16; 2003-5; 1991-9; 1990-19; 1989-6; 1988-9; 1986-5; 1984-9; FB-31

INEQUAÇÕES: 2011-17; 2003-2; 1997-12; 1995-9; 1994-18;

INEQUAÇÕES PRODUTO QUOCIENTE: 2016-1; 2014-20; 2010-9; 2006-8; 2005-6; 1998-18; 1991-11; 1990-3; 1989-20; 1987-8; 1987-13; 1986-21; 1984-17; FB-6

DESIGUALDADES: 2011-19;

GEOMETRIA PLANA

FUNDAMENTOS E ÂNGULOS: 2008-2

TRIÂNGULOS – ÂNGULOS, CONGRUÊNCIA, DESIGUALDADES: 2013-20; 2006-1; 2002-12; 2001-17; 2001-20; 2000-12; 2000-20; 1999-19; 1998-12; 1997-19; 1996-1; 1995-19; 1991-16; 1986-18; 1985-7

TRIÂNGULOS – PONTOS NOTÁVEIS: 2016-13; 2014-13; 2014-14; 2011-14; 2010-11; 2004-3; 1999-1; 1997-13; 1996-7; 1995-5;

TRIÂNGULOS RETÂNGULOS: 2016-6; 2014-8; 2009-17; 2006-17; 2005-18; 1999-16; 1996-9; 1994-4; 1992-7; 1989-1;

TRIÂNGULOS – SEMELHANÇA E RELAÇÕES MÉTRICAS: 2015-6; 2015-17; 2010-10; 2008-7; 2006-18; 2004-10; 2004-20; 1999-9; 1999-14; 1998-2; 1992-19; 1990-1; 1989-16; 1988-15; 1987-12; 1987-22; 1986-22; 1986-25; 1985-12; 1984-22; FB-4; FB-19

QUADRILÁTEROS: 2013-3; 2013-5; 2012-8; 2011-9; 2010-17; 2009-6; 2007-5; 2005-5; 2004-13; 2001-2; 1997-20; 1995-1; 1992-9; 1989-3; 1988-20; 1986-19; 1986-20; 1985-21; FB-20

POLÍGONOS – ÂNGULOS E DIAGONAIS: 2012-18; 2006-7; 2006-13; 2001-10; 1998-11; 1997-6; 1995-10; 1994-7; 1991-14; 1990-5; 1988-18; 1987-11; 1985-5; 1985-16; FB-2; FB-18

POLÍGONOS – RELAÇÕES MÉTRICAS: 2007-2; 2006-4; 2006-10; 2004-18; 2000-13; 1999-6; 1996-5; 1994-1; 1991-18; 1990-12; 1986-23

CIRCUNFERÊNCIA – POSIÇÕES RELATIVAS E SEGMENTOS TANGENTES: 2011-6; 2010-1; 2009-9; 2008-17; 2007-18; 2004-7; 2003-7; 1999-13; 1996-13; 1994-17; 1991-15; 1986-17; FB-22

ARCO CAPAZ, ÂNGULOS E COMPRIMENTOS NA CIRCUNFERÊNCIA: 2016-7; 2014-6; 2014-15; 2012-9; 2010-16; 2009-5; 2008-6; 2003-6; 2003-17; 2001-12; 2000-18; 1997-8; 1992-3; 1991-19; 1988-17; 1987-18; 1984-20

CIRCUNFERÊNCIA – RELAÇÕES MÉTRICAS E POTÊNCIA DE PONTO: 2005-20; 2003-11; 2002-20; 1998-1; 1998-5; 1996-8; 1995-13; 1990-15; 1989-19; 1984-18; 1984-23; FB-21; FB-26; FB-27

ÁREAS: 2016-8; 2016-14; 2016-15; 2016-16; 2016-20; 2015-4; 2015-5; 2015-13; 2015-19; 2015-20; 2014-2; 2014-16; 2013-9; 2012-6; 2012-19; 2011-1; 2011-3; 2011-7; 2010-2; 2010-20; 2009-11; 2008-13; 2008-19; 2007-15; 2007-20; 2006-5; 2005-1; 2005-7; 2005-8; 2003-12; 2003-20; 2002-1; 2002-8; 2002-10; 2002-13; 2002-16; 2001-8; 2000-1; 2000-2; 2000-8; 2000-14; 1999-7; 1998-13; 1997-9; 1997-16; 1996-2; 1995-6; 1994-6; 1992-2; 1992-5; 1991-17; 1991-20; 1990-13; 1990-17; 1989-2; 1989-18; 1988-16; 1988-19; 1987-10; 1987-15; 1987-19; 1987-23; 1986-24; 1985-14; 1985-20; 1985-24; 1984-19; 1984-24; 1984-25; FB-1; FB-5; FB-35

CAPÍTULO 3
ENUNCIADOS E RESOLUÇÕES

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2015/2016

1) Seja S a soma dos valores inteiros que satisfazem a inequação $\frac{(5x-40)^2}{x^2-10x+21} \le 0$. Pode-se afirmar que

a) S é um número divisível por 7.
b) S é um número primo.
c) S^2 é divisível por 5.
d) $\sqrt{S}$ é um número racional.
e) $3S+1$ é um número ímpar.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$$\frac{(5x-40)^2}{x^2-10x+21} \le 0 \Leftrightarrow (5x-40)^2 = 0 \ \vee \ x^2-10x+21<0 \Leftrightarrow x=8 \ \vee \ 3<x<7$$

$$(5x-40)^2 = 0 \Leftrightarrow 5x-40=0 \Leftrightarrow 5x=40 \Leftrightarrow x=8$$

$$x^2-10x+21<0 \Leftrightarrow (x-3)(x-7)<0 \Leftrightarrow 3<x<7$$

Os valores inteiros que satisfazem à inequação são 4, 5, 6 e 8.
Assim, $S=4+5+6+8=23$ que é um número primo.

2) Dado o sistema $S:\begin{cases} 2x-ay=6 \\ -3x+2y=c \end{cases}$ nas variáveis x e y, pode-se afirmar que

a) existe $a \in \left]\frac{6}{5}, 2\right[$ tal que o sistema S não admite solução para qualquer número real c.
b) existe $a \in \left]\frac{13}{10}, \frac{3}{2}\right[$ tal que o sistema S não admite solução para qualquer número real c.
c) se $a=\frac{4}{3}$ e $c=-9$, o sistema S não admite solução.
d) se $a \ne \frac{4}{3}$ e $c=-9$, o sistema S admite infinitas soluções.
e) se $a=\frac{4}{3}$ e $c=-9$, o sistema S admite infinitas soluções.

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi adequado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi proposta.)**

O sistema S admite solução única, se $\frac{2}{-3} \neq \frac{-a}{2} \Leftrightarrow a \neq \frac{4}{3}$ (sistema possível e determinado).

Se $a = \frac{4}{3}$ e $\frac{6}{c} = \frac{2}{-3} \Leftrightarrow c = -9$, então o sistema S admite infinitas soluções (sistema possível e indeterminado).

Se $a = \frac{4}{3}$ e $\frac{6}{c} \neq \frac{2}{-3} \Leftrightarrow c \neq -9$, então o sistema S não admite soluções (sistema impossível).

Logo, a alternativa correta é a letra e).

3) Seja $k = \left(\frac{9999\ldots997^2 - 9}{9999\ldots994} \right)^3$ onde cada um dos números $9999\ldots997$ e $9999\ldots994$, são constituídos de 2015 algarismos 9. Deseja-se que $\sqrt[i]{k}$ seja um número racional. Qual a maior potência de 2 que o índice i pode assumir?

a) 32
b) 16
c) 8
d) 4
e) 2

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$9999\ldots997 = 10^{2016} - 3$

$9999\ldots994 = 10^{2016} - 6$

$$k = \left(\frac{9999\ldots997^2 - 9}{9999\ldots994} \right)^3 = \left(\frac{\left(10^{2016} - 3\right)^2 - 3^2}{10^{2016} - 6} \right)^3 = \left(\frac{\left(10^{2016} - 3 + 3\right)\left(10^{2016} - 3 - 3\right)}{10^{2016} - 6} \right)^3 =$$

$$= \left(\frac{10^{2016} \cdot \left(10^{2016} - 6\right)}{10^{2016} - 6} \right)^3 = \left(10^{2016}\right)^3 = 10^{6048}$$

$$\sqrt[i]{k} = \sqrt[i]{10^{6048}} = 10^{\frac{6048}{i}} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \frac{6048}{i} \in \mathbb{Z}$$

Como $6048 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$, então a maior potência de 2 que o índice i pode assumir é $2^5 = 32$.

4) Para capinar um terreno circular plano, de raio 7 m, uma máquina gasta 5 horas. Quantas horas gastará essa máquina para capinar um terreno em iguais condições com 14 m de raio?

a) 10
b) 15
c) 20
d) 25
e) 30

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Um terreno circular plano de 7 m de raio tem área $S = \pi \cdot 7^2 = 49\pi \text{ m}^2$.

Assim, a máquina gasta 5 horas para capinar $49\pi \text{ m}^2$, ou seja, ela capina $\frac{49\pi \text{ m}^2}{5 \text{ h}} = 9,8\pi \text{ m}^2/\text{h}$.

Um terreno em iguais condições com 14 m de raio tem área $S' = \pi \cdot 14^2 = 196\pi \text{ m}^2$. Logo, a máquina gastará $\frac{196\pi \text{ m}^2}{9,8\pi \text{ m}^2/\text{h}} = 20 \text{ h}$ para capinar esse terreno.

5) Para obter o resultado de uma prova de três questões, usa-se a média ponderada entre as pontuações obtidas em cada questão. As duas primeiras questões têm peso $3,5$ e a 3ª, peso 3. Um aluno que realizou essa avaliação estimou que:
I – sua nota na 1ª questão está estimada no intervalo fechado de 2,3 a 3,1; e
II – sua nota na 3ª questão foi 7.
Esse aluno quer atingir média igual a 5,6. A diferença da maior e da menor nota que ele pode ter obtido na 2ª questão de modo a atingir o seu objetivo de média é
a) 0,6
b) 0,7
c) 0,8
d) 0,9
e) 1

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Seja x_i a nota da i-ésima questão, então $2,3 \le x_1 \le 3,1$ e $x_3 = 7$. Para que sua média seja 5,6, devemos ter:

$$\frac{3,5 \cdot x_1 + 3,5 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3}{3,5 + 3,5 + 3} = 5,6 \Leftrightarrow 3,5x_1 + 3,5x_2 + 3 \cdot 7 = 56 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 10$$

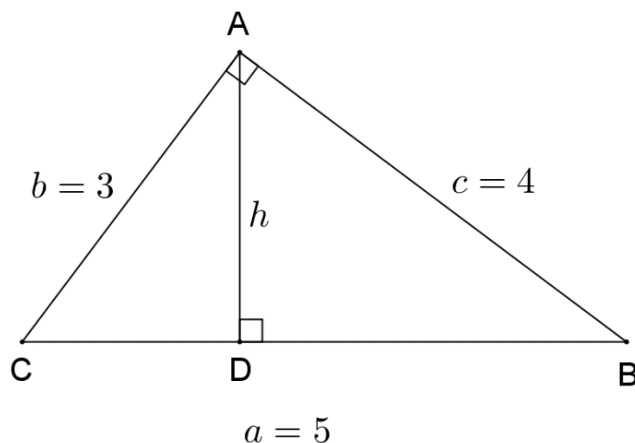
$$2,3 \le x_1 \le 3,1 \Leftrightarrow 2,3 \le 10 - x_2 \le 3,1 \Leftrightarrow -3,1 \le x_2 - 10 \le -2,3 \Leftrightarrow 6,9 \le x_2 \le 7,7$$

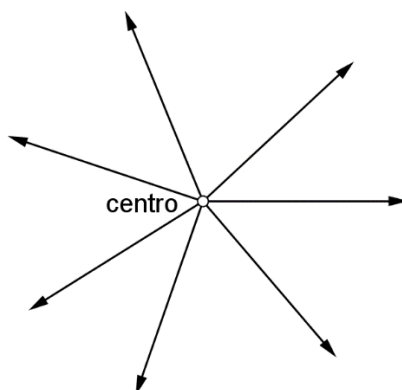
Portanto, a diferença da maior e da menor nota que ele pode ter obtido na 2ª questão é $2,3 \le x_1 \le 7,7 - 6,9 = 0,8$.

6) Qual a medida da maior altura de um triângulo de lados 3, 4, 5?
a) $\frac{12}{5}$
b) 3
c) 4
d) 5

e) $\frac{20}{3}$

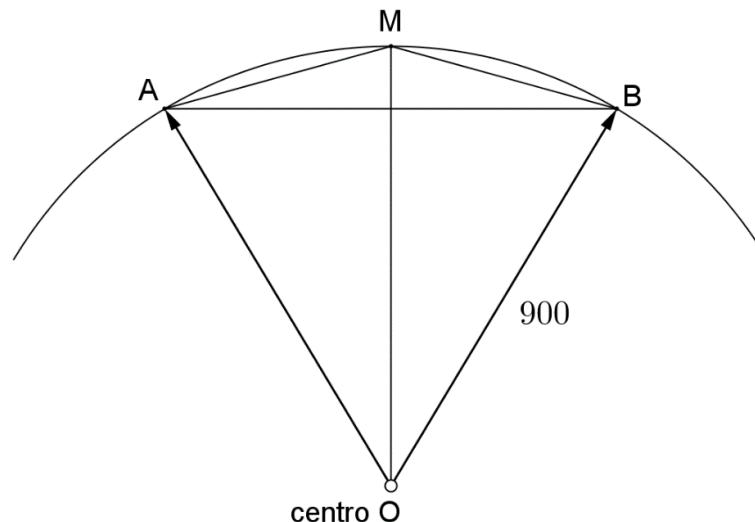
RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

Como $3^2 + 4^2 = 5^2$, o triângulo em questão é retângulo. Logo, duas de suas alturas são os dois catetos 3 e 4.
A terceira altura pode ser obtida a partir das relações métricas como segue: $a \cdot h = b \cdot c \Leftrightarrow 5 \cdot h = 3 \cdot 4 \Leftrightarrow h = \frac{12}{5} = 2,4$.
Portanto, a maior altura mede 4 unidades de comprimento.

7) Observe a figura a seguir.

A figura acima representa o trajeto de sete pessoas num treinamento de busca em terreno plano, segundo o método "radar". Nesse método, reúne-se um grupo de pessoas num ponto chamado de "centro" para, em seguida, fazê-las andar em linha reta, afastando-se do "centro". Considere que o raio de visão eficiente de uma pessoa é 100 m e que $\pi = 3$.
Dentre as opções a seguir, marque a que apresenta a quantidade mais próxima do mínimo de pessoas necessárias para uma busca eficiente num raio de 900 m a partir do "centro" e pelo método "radar".
a) 34
b) 27

c) 25
d) 20
e) 19

RESPOSTA:

RESOLUÇÃO: **(As opções dessa questão foram alteradas, pois a mesma foi anulada da maneira como foi originalmente proposta.)**

Os pontos A e B representam a posição de duas pessoas consecutivas e M o ponto médio do arco AB. Para que todo o perímetro seja coberto deve-se ter $AM \leq 100$.

Como $\text{arco}(AM) > AM$, se adotarmos $\text{arco}(AM) = 100$, então temos uma boa aproximação de AM e que satisfaz $AM < 100$.

Assim, temos $\text{arco}(AB) = 2 \cdot \text{arco}(AM) = 2 \cdot 100 = 200$.

A quantidade de arcos de comprimento 200 que "cabem" na circunferência de raio 900 é $\frac{2\pi \cdot 900}{200} = 9 \cdot \pi \approx 9 \cdot 3 = 27$.

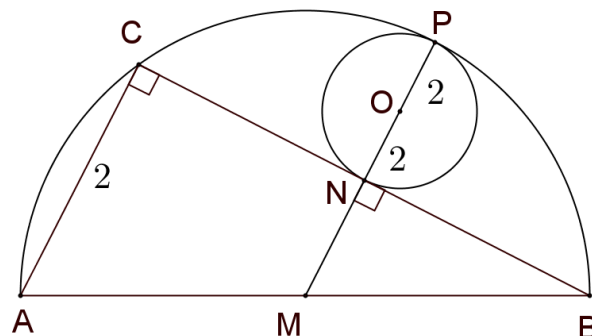
Logo, uma boa aproximação para o mínimo de pessoas necessárias é 27.

8) Num semicírculo S, inscreve-se um triângulo retângulo ABC. A maior circunferência possível que se pode construir externamente ao triângulo ABC e internamente ao S, mas tangente a um dos catetos de ABC e ao S, tem raio 2. Sabe-se ainda que o menor cateto de ABC mede 2. Qual a área do semicírculo?

a) 10π
b) $12,5\pi$
c) 15π
d) $17,5\pi$
e) 20π

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

Inicialmente, observemos que, quando inscrevemos um triângulo retângulo em um semicírculo, a hipotenusa desse triângulo é igual ao diâmetro do semicírculo.
A maior circunferência possível que se pode construir externamente ao triângulo ABC e internamente ao S, mas tangente a um dos catetos de ABC e ao S, tangencia o maior cateto.
A figura a seguir ilustra a situação descrita.

Considerando que BC seja o maior cateto de ABC, então o centro da circunferência está sobre o raio MP que coincide com a mediatriz da corda BC.

Sendo $N \in MP$ o ponto médio de BC, então MN é base média do triângulo e $MN = \frac{AC}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Portanto, o raio do semicírculo é $MP = MN + NO + OP = 1 + 2 + 2 = 5$ e sua área é $S_S = \frac{\pi \cdot 5^2}{2} = 12,5\pi$ u.a..

9) Seja x um número real tal que $x^3 + x^2 + x + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + 2 = 0$. Para cada valor real de x, obtém-se o resultado da soma de x^2 com seu inverso. Sendo assim, a soma dos valores distintos desses resultados é
a) 5
b) 4
c) 3
d) 2
e) 1

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi alterado para que a questão ficasse mais clara.)**

$x^3 + x^2 + x + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + 2 = 0 \Leftrightarrow (x^3 + x^{-3}) + (x^2 + x^{-2}) + (x + x^{-1}) + 2 = 0$

Seja $x + x^{-1} = y$, então

$x + x^{-1} = y \Rightarrow (x + x^{-1})^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 + 2 + x^{-2} = y^2 \Leftrightarrow x^2 + x^{-2} = y^2 - 2$

$x + x^{-1} = y \Rightarrow (x + x^{-1})^3 = y^3 \Leftrightarrow x^3 + x^{-3} + 3 \cdot x \cdot x^{-1} \cdot (x + x^{-1}) = y^3 \Leftrightarrow x^3 + x^{-3} = y^3 - 3y$

Substituindo as duas expressões obtidas na equação original, temos:

$\left(x^3+x^{-3}\right)+\left(x^2+x^{-2}\right)+\left(x+x^{-1}\right)+2=0 \Leftrightarrow \left(y^3-3y\right)+\left(y^2-2\right)+y+2=0 \Leftrightarrow y^3+y^2-2y=0$

$\Leftrightarrow y\left(y^2+y-2\right)=0 \Leftrightarrow y=0 \ \vee \ y=1 \ \vee \ y=-2$

Vamos encontrar os valores de x associados a cada valor de y.

$y=0 \Rightarrow x+x^{-1}=0 \Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}=0 \Leftrightarrow x^2+1=0 \Leftrightarrow x \notin \mathbb{R}$

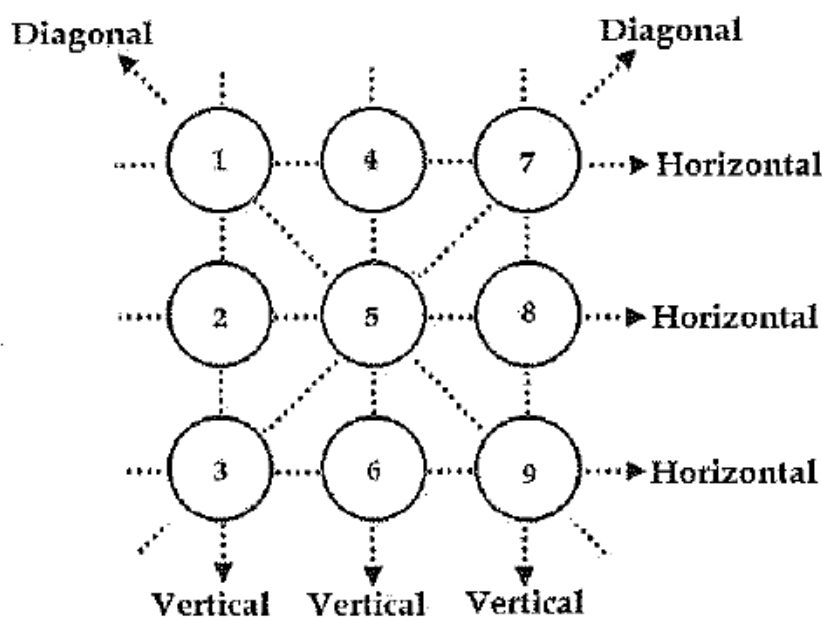
$y=1 \Rightarrow x+x^{-1}=1 \Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}=1 \Leftrightarrow x^2-x+1=0 \Leftrightarrow \Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3<0 \Leftrightarrow x \notin \mathbb{R}$

$y=-2 \Rightarrow x+x^{-1}=-2 \Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}=-2 \Leftrightarrow x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x=-1\,(\text{dupla})$

Assim, o único valor real de x é a raiz dupla $x=-1$ obtida quando $y=-2$. Assim, temos:

$y=-2 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow x^2+x^{-2}=y^2-2=(-2)^2-2=2$

Portanto, a soma dos valores distintos de x^2+x^{-2} é 2.

10) Observe a figura a seguir.

A figura acima é formada por círculos numerados de 1 a 9. Seja "TROCA" a operação de pegar dois desses círculos e fazer com que um ocupe o lugar que era do outro. A quantidade mínima S de "TROCAS" que devem ser feitas para que a soma dos três valores de qualquer horizontal, vertical ou diagonal, seja a mesma, está no conjunto:

a) {1, 2, 3}
b) {4, 5, 6}
c) {7, 8, 9}
d) {10, 11, 12}
e) {13, 14, 15}

RESPOSTA: b

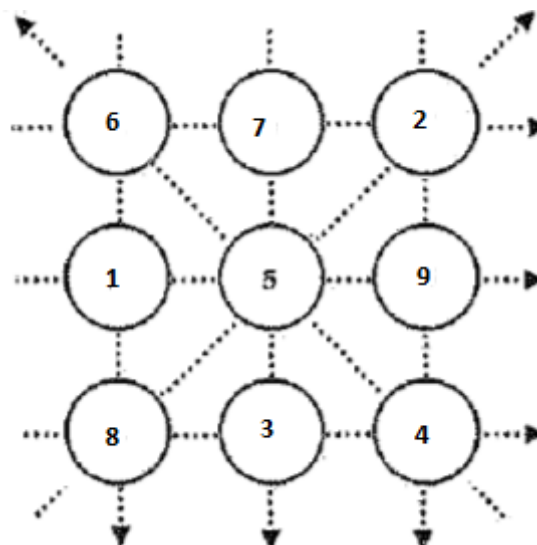
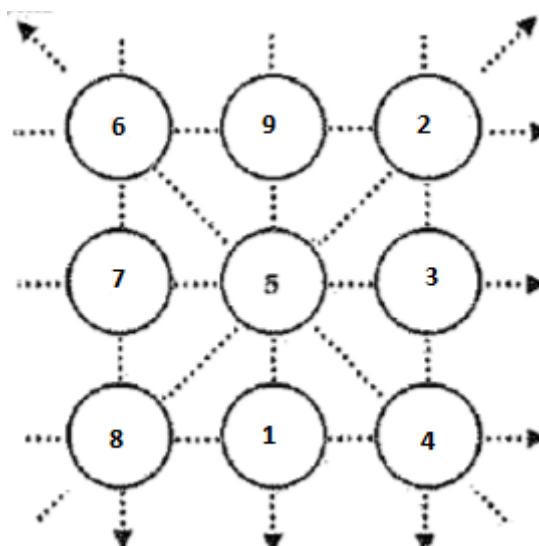
RESOLUÇÃO:
O valor da soma comum S é um terço da soma das três verticais. Quando somamos as três verticais, somamos cada um dos números uma única vez. Assim, temos:

$$S = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{3} = \frac{\frac{(1+9)\cdot 9}{2}}{3} = 15.$$

Somando a vertical central, a horizontal central e as duas diagonais, somamos todos os elementos uma vez, exceto o elemento central N que é somado quatro vezes. Portanto, quatro vezes a soma comum $S = 15$ é igual à soma dos números de 1 a 9 mais três vezes o termo central N (note que o elemento central N aparece uma vez na soma dos números de 1 a 9). Assim, temos:

$$4 \cdot 15 = (1+2+\ldots+9) + 3N \Leftrightarrow 60 = \frac{(1+9)\cdot 9}{2} + 3N \Leftrightarrow 3N = 15 \Leftrightarrow N = 5.$$

Observe agora que cada elemento dos cantos do quadrado aparece em três somas (uma horizontal, uma vertical e uma diagonal), os elementos em meio de lados aparecem em duas somas (uma vertical e uma horizontal) e o elemento central do quadrado aparece em quatro somas (uma vertical, uma horizontal e duas diagonais).

O número 9 só pode aparecer em duas filas nas ternas $\{9,1,5\}$ e $\{9,2,4\}$. Logo, o 9 deve estar no meio de um dos lados do quadrado, com 2 e 4 completando esse lado, e 1 no meio do lado oposto.
Logo, 2 e 4 são elementos de canto e deve ser opostos a 8 e 6, respectivamente. Daí é fácil completar o quadrado, como mostra a figura a seguir.

Observe que, no quadrado obtido, os elementos dos cantos são números pares e os elementos em meio de lados são ímpares e na configuração original isso está invertido.
Inicialmente, precisamos de 4 trocas para colocar os números pares nos cantos.

Agora, basta trocar 3 com 7 e depois 7 com 9, resultando um quadrado mágico conforme pedido. Para tanto, foram necessárias 6 trocas.

11) Seja n um número natural e $\oplus$ um operador matemático que aplicado a qualquer número natural, separa os algarismos pares, os soma, e a esse resultado, acrescenta tantos zeros quanto for o número obtido. Exemplo: $\oplus(3256) = 2+6 = 8$, logo fica: 800000000. Sendo assim, o produto $[\oplus(20)] \cdot [\oplus(21)] \cdot [\oplus(22)] \cdot [\oplus(23)] \cdot [\oplus(24)] \cdot \ldots \cdot [\oplus(29)]$ possuirá uma quantidade de zeros igual a

a) 46
b) 45
c) 43
d) 41
e) 40

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$[\oplus(21)] = [\oplus(23)] = [\oplus(25)] = [\oplus(27)] = [\oplus(29)] = 200 = 2 \cdot 10^2$

$[\oplus(20)] \overset{(2+0)}{=} 200 = 2 \cdot 10^2$

$[\oplus(22)] \overset{(2+2)}{=} 40000 = 4 \cdot 10^4$

$[\oplus(24)] \overset{(2+4)}{=} 6000000 = 6 \cdot 10^6$

$[\oplus(26)] \overset{(2+6)}{=} 800000000 = 8 \cdot 10^8$

$[\oplus(28)] \overset{(2+8)}{=} 100000000000 = 10 \cdot 10^{10}$

$[\oplus(20)] \cdot [\oplus(21)] \cdot [\oplus(22)] \cdot [\oplus(23)] \cdot [\oplus(24)] \cdot \ldots \cdot [\oplus(29)] =$

$= (2 \cdot 10^2)^5 \cdot (2 \cdot 10^2) \cdot (4 \cdot 10^4) \cdot (6 \cdot 10^6) \cdot (8 \cdot 10^8) \cdot (10 \cdot 10^{10}) =$

$= 12288 \cdot 10^{41}$

Logo, o produto termina em 41 zeros.

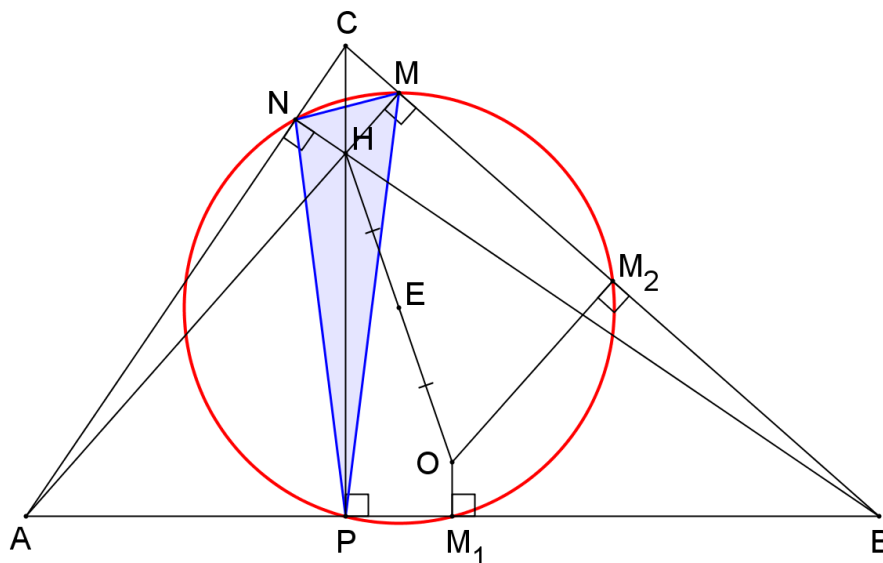
12) Na multiplicação de um número k por 70, por esquecimento, não se colocou o zero à direita, encontrando-se, com isso, um resultado 32823 unidades menor. Sendo assim, o valor para a soma dos algarismos de k é
a) par.
b) uma potência de 5.
c) múltiplo de 7.
d) um quadrado perfeito.
e) divisível por 3.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
O número $70 \cdot k$ sem o zero à direita é igual a $7k$. Assim, temos:
$70k - 7k = 32823 \Leftrightarrow 63k = 32823 \Leftrightarrow k = 521$
Portanto, a soma dos algarismos de $k = 521$ é $5 + 2 + 1 = 8$ que é par.

13) Seja ABC um triângulo de lados medindo 8, 10 e 12. Sejam M, N e P os pés das alturas traçadas dos vértices sobre os lados desse triângulo. Sendo assim, o raio do círculo circunscrito ao triângulo MNP é
a) $\frac{5\sqrt{7}}{7}$
b) $\frac{6\sqrt{7}}{7}$
c) $\frac{8\sqrt{7}}{7}$
d) $\frac{9\sqrt{7}}{7}$
e) $\frac{10\sqrt{7}}{7}$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

O círculo circunscrito ao triângulo MNP (triângulo órtico) é o círculo de nove pontos, cujo raio é igual a $\frac{R}{2}$, onde R é o raio do círculo circunscrito ao triângulo ABC.

Para calcular R, vamos calcular a área do triângulo ABC de duas formas distintas.

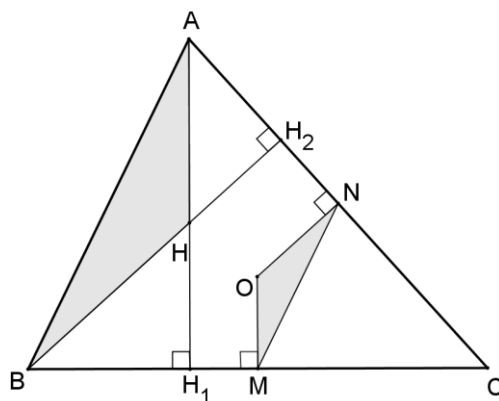
$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

onde $a = 8$, $b = 10$, $c = 12$ e $p = \frac{8+10+12}{2} = 15$. Assim, temos:

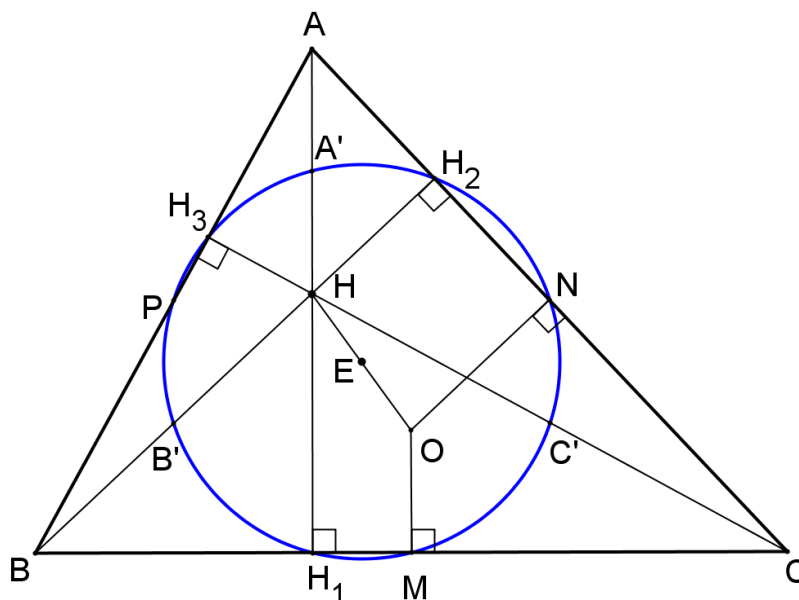
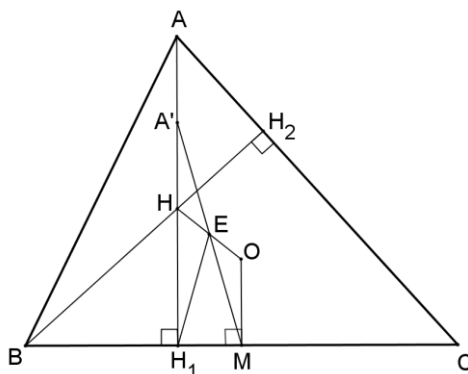
$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{8 \cdot 10 \cdot 12}{4\sqrt{15 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3}} = \frac{16\sqrt{7}}{7}.$$

Portanto, o raio do círculo circunscrito ao triângulo MNP é $\frac{R}{2} = \frac{8\sqrt{7}}{7}$ u.c.

NOTA 1: Círculo de nove pontos

A distância do circuncentro de um triângulo a um dos lados é metade da distância do ortocentro ao vértice oposto.

Demonstração:
Sejam AH_1 e BH_2 duas alturas do ΔABC que se cruzam no ortocentro H.
Sejam OM e ON segmentos pertencentes às mediatrizes dos lados BC e AC, que se cruzam no circuncentro O.

$$\begin{cases} AH \parallel OM \\ BH \parallel ON \\ AB \parallel MN \wedge MN = 2 \cdot AB \end{cases} \Rightarrow OM = \frac{AH}{2} \wedge ON = \frac{BH}{2}$$

O **círculo dos nove pontos** de um triângulo tem raio igual à metade do raio do círculo circunscrito; tem centro no ponto médio do segmento que une o ortocentro ao circuncentro; contém os três pontos médios dos lados; contém os três pés das alturas; e contém os três pontos médios dos segmentos que unem o ortocentro aos vértices.

Demonstração:

Seja A' ponto médio de AH, então $AA' = A'H = OM$, então
$\Delta A'HE \equiv \Delta MOE \Rightarrow A'E = EM \wedge HE = EO$

Como $HA' = A'A$ e $HE = EO$, o segmento $A'E$ é base média do ΔAHO, então $A'E = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}$, onde R é o raio do círculo circunscrito ao ΔABC.
No triângulo retângulo $A'H_1M$, a ceviana H_1E é a mediana relativa à hipotenusa, então $H_1E = A'E = EM = \frac{R}{2}$.
Adotando procedimento análogo em relação aos vértices B e C, conclui-se que $H_2E = B'E = EN = \frac{R}{2}$ e $H_3E = C'E = EP = \frac{R}{2}$.

Assim, sabemos que os pontos M, N e P; H_1, H_2 e H_3; A', B' e C' todos distam $\frac{R}{2}$ do ponto E médio de HO, donde esses 9 pontos pertencem a um mesmo círculo de centro E e raio $\frac{R}{2}$.

14) ABC é um triângulo equilátero. Seja D um ponto do plano de ABC, externo a esse triângulo, tal que DB intersecta AC em E, com E pertencendo ao lado AC. Sabe-se que $B\hat{A}D = A\hat{C}D = 90°$. Sendo assim, a razão entre as áreas dos triângulos BEC e ABE é

a) $\frac{1}{3}$

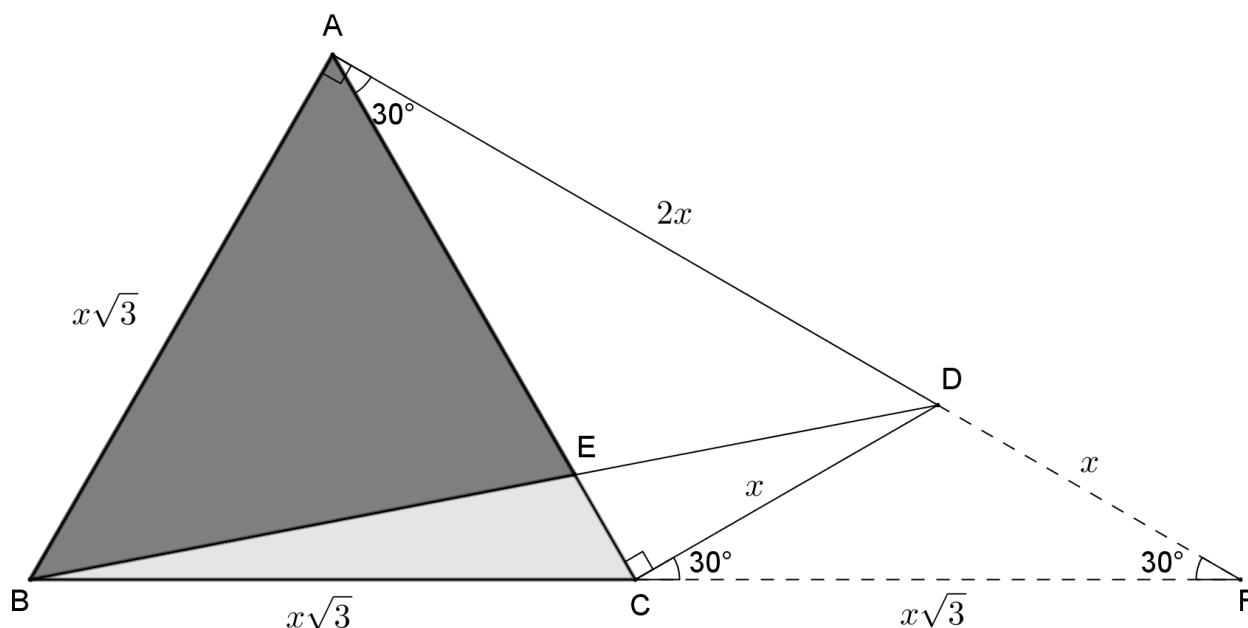
b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{2}{5}$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
1ªSOLUÇÃO:

Seja ABC um triângulo equilátero de lados $x\sqrt{3}$, conforme a figura.
Inicialmente, devemos observar que a razão entre as áreas dos triângulos BEC e ABE é igual à razão entre os segmentos CE e AE, pois os dois triângulos têm vértice comum e base sobre a mesma reta.
Vamos prolongar AD e BC até sua interseção em F para obter uma figura similar à do teorema de Menelaus.

$$B\hat{A}D = B\hat{A}C + C\hat{A}D = 90° \Rightarrow 60° + C\hat{A}D = 90° \Leftrightarrow C\hat{A}D = 30°$$

$$B\hat{F}A = 180° - B\hat{A}F - A\hat{B}F = 180° - 90° - 60° = 30°$$

$$F\hat{C}D = 180° - B\hat{C}A - A\hat{C}D = 180° - 60° - 90° = 30°$$

No triângulo retângulo ACD, temos:

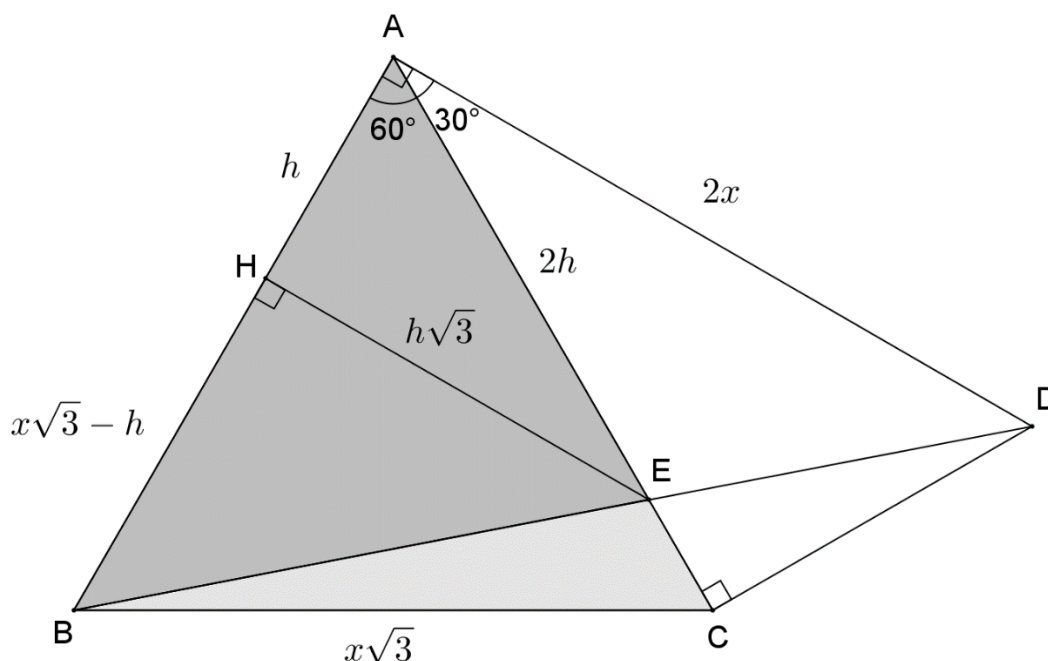
$$\cos 30° = \frac{AC}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{3}}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow AD = 2x$$

$$\text{sen}\, 30° = \frac{CD}{AD} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{CD}{2x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow CD = x$$

Como $F\hat{C}D = C\hat{F}D = 30°$, o triângulo CFD é isósceles, o que implica $DF = CD = x$.
Como $F\hat{A}C = A\hat{F}C = 30°$, o triângulo AFC é isósceles, o que implica $CF = CA = x\sqrt{3}$.
Aplicando o teorema de Menelaus ao ACF com a secante BED, temos:

$$\frac{AD}{FD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{FB}{CB} = 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{2x\sqrt{3}}{x\sqrt{3}} = 1 \Leftrightarrow \frac{CE}{AE} = \frac{1}{4}.$$

Portanto, $\frac{S_{BEC}}{S_{ABE}} = \frac{CE}{AE} = \frac{1}{4}$.

2ª SOLUÇÃO:

Seja ABC um triângulo equilátero de lados $x\sqrt{3}$, conforme a figura, e seja $EH = h\sqrt{3}$ a perpendicular ao lado AB traçada por E.

Inicialmente, devemos observar que a razão entre as áreas dos triângulos BEC e ABE é igual à razão entre os segmentos CE e AE, pois os dois triângulos têm vértice comum e base sobre a mesma reta.

No triângulo retângulo AHE, temos:

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{HE}{AE} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{h\sqrt{3}}{AE} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow AE = 2h$$

$$\cos 60° = \frac{AH}{AE} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{AH}{2h} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow AH = h$$

No triângulo retângulo ACD, temos:

$$B\hat{A}D = B\hat{A}C + C\hat{A}D = 90° \Rightarrow 60° + C\hat{A}D = 90° \Leftrightarrow C\hat{A}D = 30°$$

$$\cos 30° = \frac{AC}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{3}}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow AD = 2x$$

$$\triangle BHE \sim \triangle BAD \Rightarrow \frac{BH}{BA} = \frac{HE}{AD} \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{3}-h}{x\sqrt{3}} = \frac{h\sqrt{3}}{2x} \Leftrightarrow 2x\sqrt{3} - 2h = 3h \Leftrightarrow h = \frac{2x\sqrt{3}}{5}$$

Portanto, $\frac{S_{BEC}}{S_{ABE}} = \frac{CE}{AE} = \frac{x\sqrt{3}-2h}{2h} = \frac{x\sqrt{3} - 2\cdot\frac{2x\sqrt{3}}{5}}{2\cdot\frac{2x\sqrt{3}}{5}} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{5}}{\frac{4x\sqrt{3}}{5}} = \frac{1}{4}$.

15) Seja ABCD um quadrado de lado "2a" cujo centro é "O". Os pontos M, P e Q são os pontos médios dos lados AB, AD e BC, respectivamente. O segmento BP intersecta a circunferência de centro "O" e raio "a" em R e, também OM, em "S". Sendo assim, a área do triângulo SMR é

a) $\frac{3a^2}{20}$

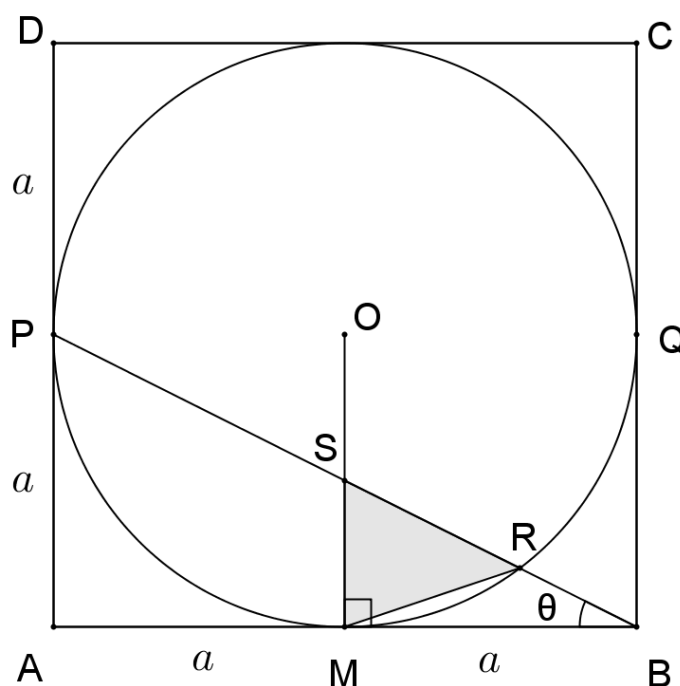
b) $\frac{7a^2}{10}$

c) $\frac{9a^2}{20}$

d) $\frac{11a^2}{20}$

e) $\frac{13a^2}{20}$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo BAP, temos:

$$BP^2 = BA^2 + PA^2 = (2a)^2 + a^2 = 5a^2 \Leftrightarrow BP = a\sqrt{5}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{PA}{BP} = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Considerando a potência do ponto B em relação à circunferência, temos:

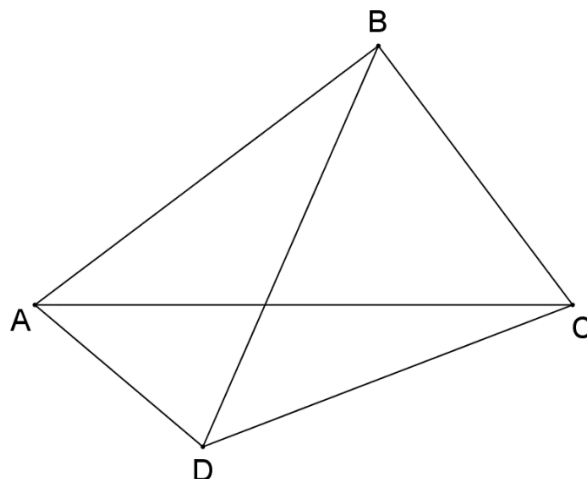
$$BR \cdot BP = BM^2 \Leftrightarrow BR \cdot a\sqrt{5} = a^2 \Leftrightarrow BR = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

$$\triangle BMS \sim \triangle BAP \Rightarrow \frac{MS}{AP} = \frac{BM}{BA} \Leftrightarrow \frac{MS}{a} = \frac{a}{2a} \Leftrightarrow MS = \frac{a}{2}$$

A área do triângulo BMR é dada por $S_{BMR} = \frac{BM \cdot BR}{2} \operatorname{sen}\theta = \frac{a \cdot \frac{a}{\sqrt{5}}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{a^2}{10}$.

Portanto, a área do triângulo SMR é dada por

$$S_{SMR} = S_{BMS} - S_{BMR} = \frac{a \cdot \frac{a}{2}}{2} - \frac{a^2}{10} = \frac{3a^2}{20}.$$

16) Observe a figura a seguir.

Seja ABC um triângulo retângulo de hipotenusa 6 e com catetos diferentes. Com relação à área ‘S’ de ABC, pode-se afirmar que

a) será máxima quando um dos catetos for $3\sqrt{2}$.

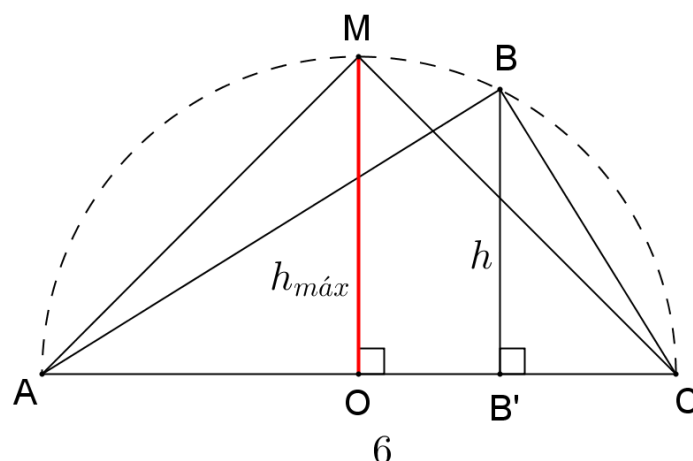
b) será máxima quando um dos ângulos internos for $30°$.

c) será máxima quando um cateto for o dobro do outro.

d) será máxima quando a soma dos catetos for $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

e) seu valor máximo não existe.

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

Seja, sem perda de generalidade, $AC = 6$ a hipotenusa do triângulo retângulo ABC.

A área do triângulo ABC é dada por $S_{ABC} = \frac{AC \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot h}{2} = 3h$, onde h é a altura relativa à hipotenusa.

Todos os triângulos retângulos de hipotenusa $AC = 6$ estão inscritos em uma circunferência de raio $R = \frac{AC}{2} = \frac{6}{2} = 3$ e centro em O, ponto médio de AC.

Dessa forma, o valor máximo da altura relativa à hipotenusa é $h_{máx} = OM = R = 3$.

Entretanto, quando $h = h_{máx} = 3$ o triângulo é retângulo isósceles e o enunciado afirma que os catetos devem ser diferentes, o que implica $h \neq 3$.

Sendo assim, conclui-se que $h \in]0,3[$ e $S_{ABC} = 3h \in]0,9[$.

Portanto, não existe valor máximo para a área de ABC (o valor 9 é o supremo da área).

17) Sejam $A = \{1, 2, 3, \ldots, 4029, 4030\}$ um subconjunto dos números naturais e $B \subset A$, tal que não existem x e y, $x \neq y$, pertencentes a B nos quais x divida y. O número máximo de elementos de B é N. Sendo assim, a soma dos algarismos de N é

a) 8
b) 9
c) 10
d) 11
e) 12

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

Observemos que, se $n \in \mathbb{N}$, então o menor múltiplo natural de n é 2n. Dessa forma, no conjunto $B = \{(n+1), (n+2), \ldots, 2n\}$ não há dois números tais que um divide o outro.

Vamos provar que para qualquer $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k \leq n$, existe um múltiplo de k no conjunto B, ou seja, vamos encontrar um $p \in \mathbb{N}$ tal que $n + 1 \leq kp \leq 2n$.

$$n + 1 \leq kp \leq 2n \Leftrightarrow \frac{n+1}{k} \leq p \leq \frac{2n}{k}$$

Como $\frac{2n}{k}-\left(\frac{n+1}{k}\right)=\frac{n+1}{k}>1$, pois $n+1>k$, então existe pelo menos um número natural p entre $\frac{n+1}{k}$ e $\frac{2n}{k}$.

Sendo assim, provamos que, dado um conjunto $A=\{1,2,3,\ldots,2n\}$, o maior subconjunto de A no qual não há dois números tais que um divide o outro é $B=\{(n+1),(n+2),\ldots,2n\}$.

No caso do enunciado, temos $A=\{1,2,3,\ldots,4029,4030\}$ e o subconjunto com o número máximo de elementos é $B=\{2016,2017,\ldots,4030\}$. O número de elementos de B é $N=4030-2016+1=2015$, cuja soma dos algarismos é $2+0+1+5=8$.

18) O número de divisores positivos de 10^{2015} que são múltiplos de 10^{2000} é
a) 152
b) 196
c) 216
d) 256
e) 276

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Um múltiplo positivo de 10^{2000} é da forma $k\cdot 10^{2000}$, onde $k\in\mathbb{N}^*$.

Para que $k\cdot 10^{2000}$ seja um divisor positivo de 10^{2015}, o número $\frac{10^{2015}}{k\cdot 10^{2000}}=\frac{10^{15}}{k}$ deve ser um inteiro positivo.

Portanto, a quantidade de valores de k, que corresponde à quantidade de divisores positivos de 10^{2015} que são múltiplos de 10^{2000}, é igual ao número de divisores positivos de $10^{15}=2^{15}\cdot 5^{15}$, ou seja, $d(10^{15})=(15+1)\cdot(15+1)=256$.

19) Dado que o número de elementos dos conjuntos A e B são, respectivamente, p e q, analise as sentenças que seguem sobre o número N de subconjuntos não vazios de $A\cup B$.

I - $N=2^p+2^q-1$

II - $N=2^{pq-1}$

III - $N=2^{p+q}-1$

IV - $N=2^p-1$, se a quantidade de elementos de $A\cap B$ é p.

Com isso, pode-se afirmar que a quantidade dessas afirmativas que são verdadeiras é:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$\#(A) = p$ e $\#(B) = q$

$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B) = p + q - \#(A \cap B)$

A quantidade de subconjuntos de $A \cup B$ é $\#(P(A \cup B)) = 2^{\#(A \cup B)} = 2^{p+q-\#(A \cap B)}$.

A quantidade de subconjuntos não vazios de $A \cup B$ é $N = \#(P(A \cup B)) - 1 = 2^{p+q-\#(A \cap B)} - 1$.

Portanto, todas as alternativas são falsas.

20) No triângulo isósceles ABC, $AB = AC = 13$ e $BC = 10$. Em AC marca-se R e S, com $CR = 2x$ e $CS = x$. Paralelo a AB e passando por S traça-se o segmento ST, com T em BC. Por fim, marcam-se U, P e Q, simétricos de T, S e R, nessa ordem, e relativo à altura de ABC com pé sobre BC. Ao analisar a medida inteira de x para que a área do hexágono PQRSTU seja máxima, obtém-se:

a) 5

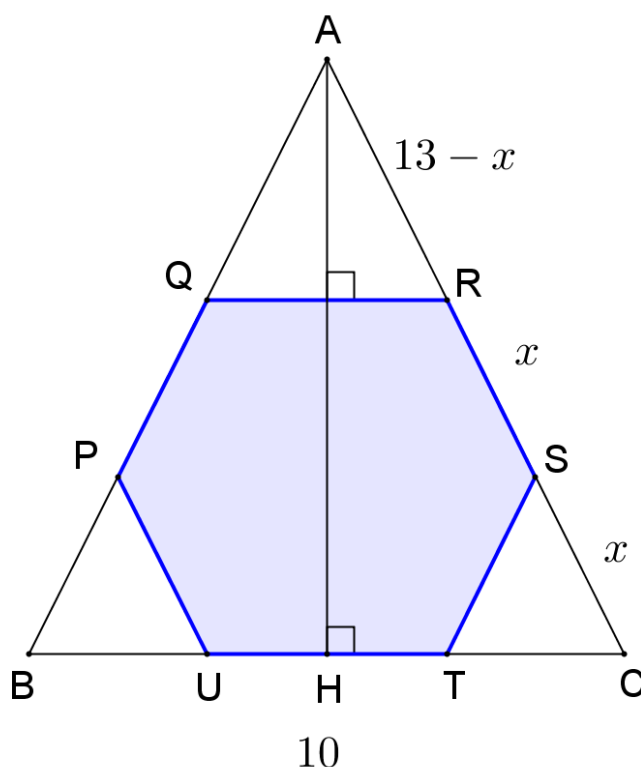
b) 4

c) 3

d) 2

e) 1

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$$QR \parallel BC \Rightarrow \Delta AQR \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{S_{AQR}}{S_{ABC}} = \left(\frac{13-x}{13}\right)^2 \Leftrightarrow S_{AQR} = \left(\frac{13-x}{13}\right)^2 \cdot S_{ABC}$$

$$ST \parallel AB \Rightarrow \Delta CST \sim \Delta CAB \Rightarrow \frac{S_{CST}}{S_{CAB}} = \left(\frac{x}{13}\right)^2 \Leftrightarrow S_{CST} = S_{BPU} = \left(\frac{x}{13}\right)^2 \cdot S_{ABC}$$

$$S_{PQRSTU} = S_{ABC} - S_{AQR} - S_{BPU} - S_{CST} = \left(1 - \left(\frac{13-x}{13}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{x}{13}\right)^2\right) \cdot S_{ABC} = \left(26x - 3x^2\right) \cdot \frac{S_{ABC}}{13^2}$$

Como $S_{ABC} = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60$ é uma constante, a área do hexágono PQRSTU será máxima quando o trinômio do 2º grau $f(x) = -3x^2 + 26x$ atingir o seu valor máximo, o que ocorre no x do vértice, ou seja, em $x_V = \frac{-26}{2 \cdot (-3)} = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$.

Como o valor do x do vértice não é inteiro, vamos calcular o valor do trinômio nos inteiros mais próximos. Assim, temos: $f(4) = -3 \cdot 4^2 + 26 \cdot 4 = 56$ e $f(5) = -3 \cdot 5^2 + 26 \cdot 5 = 55$.

Portanto, a medida inteira de x que faz a área do hexágono ser máxima é $x = 4$.

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2014/2015

1) Seja x um número real tal que $x+\frac{3}{x}=9$. Um possível valor de $x-\frac{3}{x}$ é $\sqrt{a}$. Sendo assim, a soma dos algarismos de "a" será:
(A) 11
(B) 12
(C) 13
(D) 14
(E) 15

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$$x+\frac{3}{x}=9 \Rightarrow \left(x+\frac{3}{x}\right)^2=9^2 \Leftrightarrow x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}=81 \Leftrightarrow x^2+\frac{9}{x^2}=75$$

$$x^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}=75-6 \Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{x}\right)^2=69 \Leftrightarrow x-\frac{3}{x}=\pm\sqrt{69}$$

Portanto, $a=69$ e a soma de seus algarismos é $6+9=15$.

2) Considere que as pessoas A e B receberão transfusão de sangue. Os aparelhos utilizados por A e B liberam, em 1 minuto, 19 e 21 gotas de sangue, respectivamente, e uma gota de sangue de ambos os aparelhos tem $0,04\ \text{m}\ell$. Os aparelhos são ligados simultaneamente e funcionam ininterruptamente até completarem um litro de sangue. O tempo que o aparelho de A levará a mais que o aparelho de B será, em minutos, de aproximadamente:
(A) 125
(B) 135
(C) 145
(D) 155
(E) 165

RESPOSTA: A **(As opções foram alteradas, pois não havia alternativa correta na formulação original da questão)**

RESOLUÇÃO:

O aparelho de A libera 19 gotas de $0,04\ \text{m}\ell$ por minuto, ou seja, $19\cdot 0,04\cdot 10^{-3}\ \ell=76\cdot 10^{-5}\ \ell$. O tempo necessário para completar $1\ \ell$ de sangue é $\frac{1}{76\cdot 10^{-5}}=\frac{100000}{76}\ \text{min}$.

O aparelho de B libera 21 gotas de $0,04\ \text{m}\ell$ por minuto, ou seja, $21\cdot 0,04\cdot 10^{-3}\ \ell=84\cdot 10^{-5}\ \ell$. O tempo necessário para completar $1\ \ell$ de sangue é $\frac{1}{84\cdot 10^{-5}}=\frac{100000}{84}\ \text{min}$.

Assim, o tempo que o aparelho de A levará a mais que o aparelho de B é $\frac{100000}{76}-\frac{100000}{84}=25000\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)=\frac{50000}{399}\approx 125\text{ min}$.

3) A solução real da equação $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=5$ é:
(A) múltiplo de 3.
(B) par e maior do que 17.
(C) ímpar e não primo.
(D) um divisor de 130.
(E) uma potência de 2.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
A condição de existência das raízes quadradas é $x+4\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -4$ e $x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$. Portanto, devemos ter $x\ge 1$.

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=5 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}\right)^2=5^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x+4+2\sqrt{x+4}\sqrt{x-1}+x-1=25 \Leftrightarrow 2\sqrt{(x+4)(x-1)}=22-2x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+4)(x-1)}=11-x \Leftrightarrow \left(\sqrt{(x+4)(x-1)}\right)^2=(11-x)^2 \;\wedge\; 11-x\ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+4)(x-1)=121-22x+x^2 \;\wedge\; x\le 11 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+3x-4=121-22x+x^2 \;\wedge\; x\le 11 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 25x=125 \;\wedge\; x\le 11 \Leftrightarrow x=5$$

Observe que a condição de existência inicial é $x\ge 1$, então $x=5$ é solução da equação.
Portanto, a solução da equação é um divisor de 130.

2ª SOLUÇÃO:
Lembrando a condição de existência obtida na 1ª solução, devemos ter $x\ge 1$.
Sejam $a=\sqrt{x+4}$ e $b=\sqrt{x-1}$, a equação $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=5$ é equivalente a $a+b=5$.
Elevando a e b ao quadrado, temos:

$$a^2=x+4 \;\wedge\; b^2=x-1 \Rightarrow a^2-b^2=(x+4)-(x-1)=5$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)=5$$

Substituindo $a+b=5$ na igualdade acima, obtemos $5\cdot(a-b)=5 \Leftrightarrow a-b=1$.

Dessa forma, resulta o sistema $\begin{cases} a+b=5 \\ a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=3 \;\wedge\; b=2$.

Vamos agora calcular x retornando a substituição. Assim, temos:

$$\sqrt{x+4}=3 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+4}\right)^2=3^2 \Leftrightarrow x+4=9 \Leftrightarrow x=5$$

Observe que $\sqrt{x-1}=2 \Leftrightarrow x-1=4 \Leftrightarrow x=5$ resulta no mesmo valor. Além disso, cabe notar também que esse valor satisfaz a condição de existência $x\ge 1$.

4) Observe as figuras a seguir.

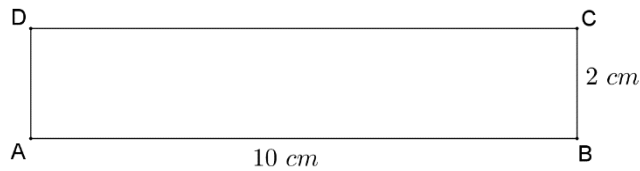
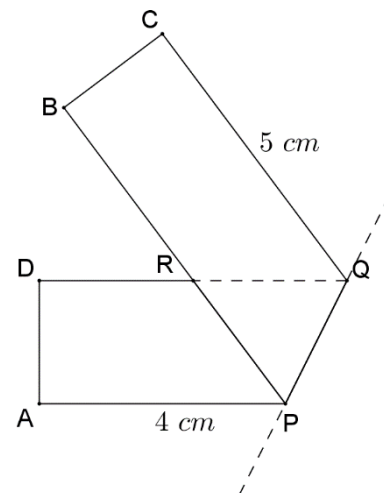



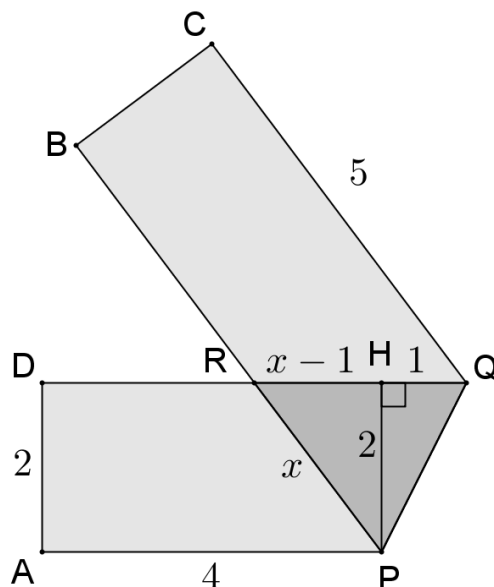
Figura I

Figura II

Uma dobra é feita no retângulo $10\text{ cm}\times 2\text{ cm}$ da figura I, gerando a figura plana II. Essa dobra está indicada pela reta suporte de PQ. A área do polígono $APQCBRD$ da figura II, em cm^2, é:

(A) $8\sqrt{5}$
(B) 20
(C) $10\sqrt{2}$
(D) $\frac{35}{2}$
(E) $\frac{13\sqrt{6}}{2}$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
A área do polígono APQCBRD é igual à área do retângulo ABCD menos a área do triângulo PQR .

O polígono APQCBRD é obtido dobrando-se o retângulo ABCD, então $A\hat{P}Q + Q\hat{P}B = 180^\circ$ (*) e $C\hat{Q}P + P\hat{Q}D = 180^\circ$.

Além disso, $AP \parallel DQ$ o que implica $A\hat{P}Q + P\hat{Q}D = 180^\circ$ (**).

Comparando (*) e (**), conclui-se que $Q\hat{P}B = P\hat{Q}D$, ou seja, $Q\hat{P}R = P\hat{Q}R$.

Daí conclui-se que o triângulo PQR é isósceles e $PR = QR = x$.

Traçando-se $PH \perp RQ$, obtemos o retângulo APHD no qual $AP = DH = 4$.

Portanto, $HQ = DQ - DH = 5 - 4 = 1$ e $RH = RQ - HQ = x - 1$.

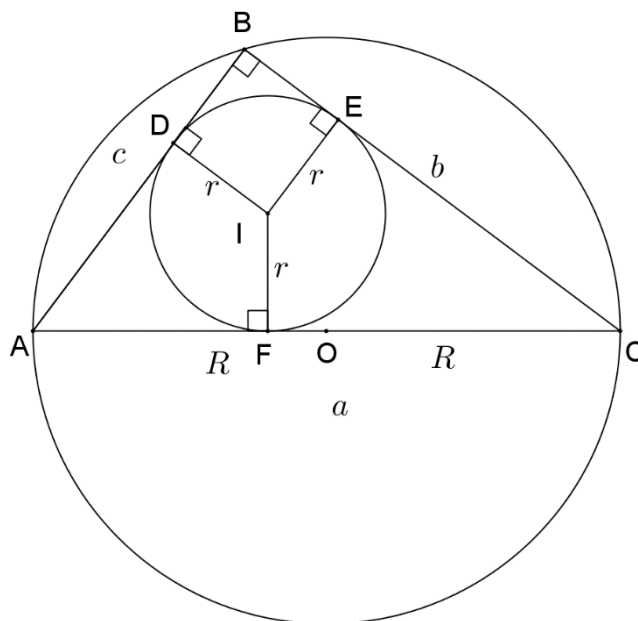
Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo PHR, temos: $(x-1)^2 + 2^2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 4 = x^2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

Logo, $S_{APQCBRD} = S_{ABCD} - S_{PQR} = 10 \cdot 2 - \frac{x \cdot 2}{2} = 20 - x = 20 - \frac{5}{2} = \frac{35}{2}$ u.a..

5) Seja ABC um triângulo retângulo de hipotenusa 26 e perímetro 60 . A razão entre a área do círculo inscrito e do círculo circunscrito nesse triângulo é, aproximadamente:

(A) 0,035
(B) 0,055
(C) 0,075
(D) 0,095
(E) 0,105

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Vamos demonstrar dois resultados que são válidos para qualquer triângulo retângulo.

Seja um triângulo retângulo ABC de hipotenusa a, catetos b e c, semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$, raio do círculo inscrito r e raio do círculo circunscrito R.

Os segmentos das tangentes ao círculo inscrito a partir do vértice B são $BD = BE = p - a$. Logo, o quadrilátero $BDIE$ é um quadrado e $\boxed{r = p - a}$.

Além disso, como a hipotenusa do triângulo subentende um ângulo inscrito de 90°, então a hipotenusa $AC = a = 2R \Leftrightarrow \boxed{R = \frac{a}{2}}$.

No caso em questão, temos $a = 26$ e $2p = 60 \Leftrightarrow p = 30$. Aplicando os resultados obtidos, temos $r = p - a = 30 - 26 = 4$ e $R = \frac{a}{2} = \frac{26}{2} = 13$.

Portanto, a razão entre as áreas do círculo inscrito e do circunscrito é $\frac{S_{inc}}{S_{circun}} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{4}{13}\right)^2 = \frac{16}{169} \approx 0,095$.

6) Considere que ABC é um triângulo retângulo em A, de lados $AC = b$ e $BC = a$. Seja H o pé da perpendicular traçada de A sobre BC, e M o ponto médio de AB, se os segmentos AH e CM cortam-se em P, a razão $\frac{AP}{PH}$ será igual a:

(A) $\frac{a^2}{b^2}$

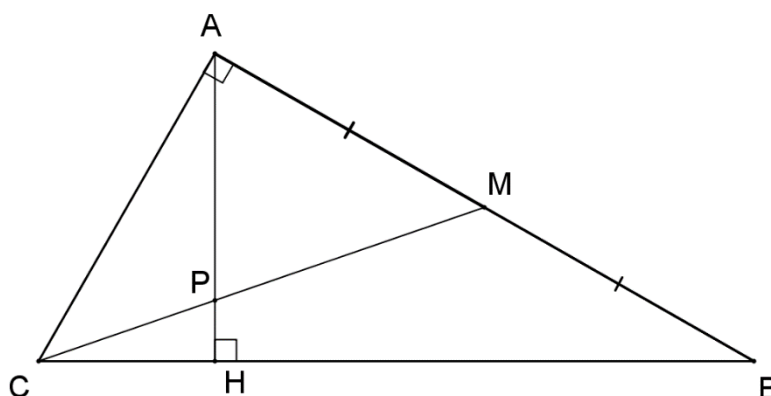
(B) $\frac{a^3}{b^2}$

(C) $\frac{a^2}{b^3}$

(D) $\frac{a^3}{b^3}$

(E) $\frac{a}{b}$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

Aplicando o teorema de Menelaus ao triângulo AHB com ceviana CPM, temos:

$\frac{CH}{CB} \cdot \frac{PA}{PH} \cdot \frac{MB}{MA} = 1 \Leftrightarrow \frac{AP}{PH} = \frac{BC}{CH}$.

Considerando as relações métricas no triângulo retângulo ABC, temos:

$AC^2 = BC \cdot CH \Leftrightarrow b^2 = a \cdot CH \Leftrightarrow CH = \frac{b^2}{a}$.

Portanto, $\frac{AP}{PH} = \frac{BC}{CH} = \frac{a}{\frac{b^2}{a}} = \frac{a^2}{b^2}$.

7) Se a fração irredutível $\frac{p}{q}$ é equivalente ao inverso do número $\frac{525}{900}$, então o resto da divisão do período da dízima $\frac{q}{p+1}$ por 5 é:

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
O inverso do número $\frac{525}{900}$ é $\frac{900}{525}=\frac{12}{7}$, em sua forma irredutível. Logo, $p=12$ e $q=7$.
A dízima $\frac{q}{p+1}$ é dada por $\frac{q}{p+1}=\frac{7}{13}=0,\overline{538461}$, onde a barra indica o período.
Portanto, o resto do período da dízima, 538461, por 5 é 1.

8) Um número natural N, quando dividido por 3, 5, 7 ou 11, deixa resto igual a 1. Calcule o resto da divisão de N por 1155, e assinale a opção correta.
(A) 17
(B) 11
(C) 7
(D) 5
(E) 1

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Se N deixa resto 1 na divisão por 3, 5, 7 ou 11, então $N-1$ é múltiplo de 3, 5, 7 ou 11, ou seja, $N-1$ deve ser múltiplo de $\text{mmc}(3,5,7,11)=3\cdot 5\cdot 7\cdot 11=1155$.
Portanto, $N-1$ é múltiplo de 1155 e o resto da divisão de N por 1155 é 1.

9) Considere o operador matemático $'*'$ que transforma o número real X em $X+1$ e o operador $'\oplus'$ que transforma o número real Y em $\frac{1}{Y+1}$.
Se $\oplus\left\{*\left[*\left(\oplus\left\{\oplus\left[*\left(\oplus\{*1\}\right)\right]\right\}\right)\right]\right\}=\frac{a}{b}$, onde a e b são primos entre si, a opção correta é:
(A) $\frac{a}{b}=0,27272727\ldots$
(B) $\frac{b}{a}=0,2702702\ldots$
(C) $\frac{2a}{b}=0,540540540\ldots$
(D) $2b+a=94$
(E) $b-3a=6$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$*1=1+1=2$

$\oplus\{*1\}=\oplus\{2\}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$

$*(\oplus\{*1\})=*\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

$\oplus[*(\oplus\{*1\})]=\oplus\left[\frac{4}{3}\right]=\frac{1}{\frac{4}{3}+1}=\frac{1}{\frac{7}{3}}=\frac{3}{7}$

$\oplus\{\oplus[*(\oplus\{*1\})]\}=\oplus\left\{\frac{3}{7}\right\}=\frac{1}{\frac{3}{7}+1}=\frac{1}{\frac{10}{7}}=\frac{7}{10}$

$*\left(\oplus\{\oplus[*(\oplus\{*1\})]\}\right)=*\left(\frac{7}{10}\right)=\frac{7}{10}+1=\frac{17}{10}$

$*\left[*\left(\oplus\{\oplus[*(\oplus\{*1\})]\}\right)\right]=*\left[\frac{17}{10}\right]=\frac{17}{10}+1=\frac{27}{10}$

$\oplus\left\{*\left[*\left(\oplus\{\oplus[*(\oplus\{*1\})]\}\right)\right]\right\}=\oplus\left\{\frac{27}{10}\right\}=\frac{1}{\frac{27}{10}+1}=\frac{10}{37}$

$\oplus\left\{*\left[*\left(\oplus\{\oplus[*(\oplus\{*1\})]\}\right)\right]\right\}=\frac{a}{b}=\frac{10}{37}\Rightarrow a=10 \wedge b=37\Rightarrow\frac{2a}{b}=\frac{20}{37}=0,54054054\ldots$

10) Analise as afirmativas abaixo.

I) Se $2^x=A$, $A^y=B$, $B^z=C$ e $C^k=4096$, então $x\cdot y\cdot z\cdot k=12$.

II) $t^m+(t^m)^p=(t^m)\left(1+(t^m)^{p-1}\right)$, para quaisquer reais t, m e p não nulos.

III) $r^q+r^{q^w}=(r^q)\left(1+r^{q^{(w-1)}}\right)$, para quaisquer reais q, r e w não nulos.

IV) Se $(10^{100})^x$ é um número que tem 200 algarismos, então x é 2.

Assinale a opção correta.

(A) Apenas as afirmativas I e II são falsas.
(B) Apenas as afirmativas III e IV são falsas.
(C) Apenas as afirmativas I e III são falsas.
(D) Apenas as afirmativas I, II e IV são falsas.
(E) Apenas as afirmativas I, III e IV são falsas.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

I) VERDADEIRA

$C^k=(B^z)^k=B^{z\cdot k}=(A^y)^{z\cdot k}=A^{y\cdot z\cdot k}=(2^x)^{y\cdot z\cdot k}=2^{x\cdot y\cdot z\cdot k}=4096=2^{12}\Leftrightarrow x\cdot y\cdot z\cdot k=12$

II) VERDADEIRA

$t^m + (t^m)^p = t^m + t^m \cdot (t^m)^{p-1} = (t^m)(1 + (t^m)^{p-1})$

III) FALSA

$r^q + r^{q^w} = r^q + r^q \cdot r^{(q^w - q)} = (r^q)(1 + r^{(q^w - q)}) \neq (r^q)(1 + r^{q^{(w-1)}})$,

IV) FALSA

Se $(10^{100})^x$ tem 200 algarismos, então $10^{199} \le (10^{100})^x = 10^{100x} < 10^{200} \Leftrightarrow 1{,}99 \le x < 2$.

11) Considere a equação do 2° grau $2014x^2 - 2015x - 4029 = 0$. Sabendo-se que a raiz não inteira é dada por $\frac{a}{b}$, onde "a" e "b" são primos entre si, a soma dos algarismos de "a + b" é:

(A) 7
(B) 9
(C) 11
(D) 13
(E) 15

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Inicialmente, observamos que $x = -1$ é raiz da equação, pois $2014 \cdot (-1)^2 - 2015 \cdot (-1) - 4029 = 2014 + 2015 - 4029 = 0$. Logo, a equação possui uma raiz inteira $x = -1$ e uma raiz não inteira $\frac{a}{b}$.

O produto das raízes da equação é $\sigma_2 = (-1) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-4029}{2014} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{4029}{2014} \Leftrightarrow a = 4029 \wedge b = 2014$ e $a + b = 4029 + 2014 = 6043$ cuja soma dos algarismos é $6 + 4 + 3 = 13$.
Note que $a = 4029 = 3 \cdot 17 \cdot 79$ e $b = 2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$ não possuem fatores comuns em suas fatorações canônicas, sendo portanto primos entre si.

12) Sobre os números inteiros positivos e não nulos x, y e z, sabe-se:

I) $x \neq y \neq z$

II) $\frac{y}{x - z} = \frac{x + y}{z} = 2$

III) $\sqrt{z} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Com essas informações, pode-se afirmar que o número $(x - y)\frac{6}{z}$ é:

(A) ímpar e maior do que três.
(B) inteiro e com dois divisores.
(C) divisível por cinco.
(D) múltiplo de três.
(E) par e menor do que seis.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$$\sqrt{z}=\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}=9^{\frac{1}{2}}=3 \Leftrightarrow z=3^2=9$$

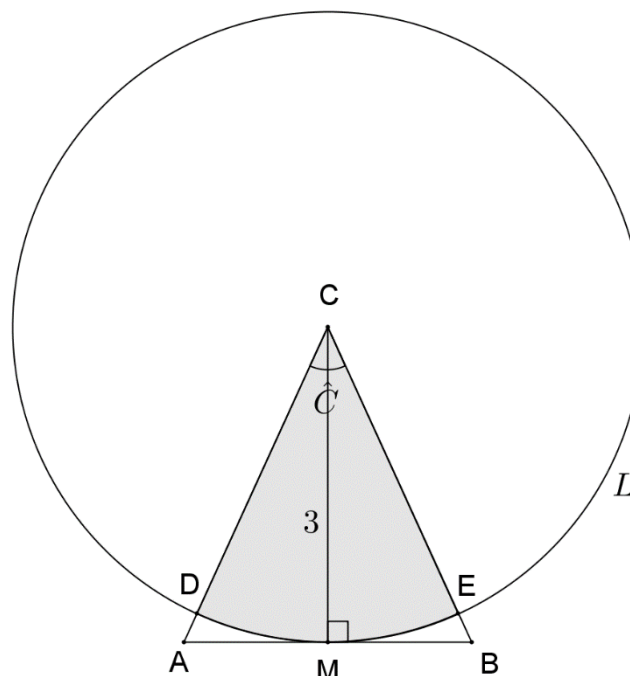
$$\frac{y}{x-9}=\frac{x+y}{9}=2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=18 \\ x+y=18 \end{cases} \Leftrightarrow x=12 \ \wedge \ y=6$$

Logo, $(x-y)\frac{6}{z}=(12-6)\frac{6}{9}=4$ que é um número par e menor do que seis.

13) Suponha que ABC seja um triângulo isósceles com lados $AC=BC$, e que "L" seja a circunferência de centro "C", raio igual a "3" e tangente ao lado AB. Com relação à área da superfície comum ao triângulo ABC e ao círculo de "L", pode-se afirmar que:

(A) não possui um valor máximo.
(B) pode ser igual a 5π.
(C) não pode ser igual a 4π.
(D) possui um valor mínimo igual a 2π.
(E) possui um valor máximo igual a $4,5\pi$.

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

A área comum S entre o triângulo ABC e o círculo "L" está sombreada na figura e é um setor circular de raio 3 e ângulo $\hat{C}$.

Como o ângulo $\hat{C}$ varia de 0° a 180°, com os dois extremos excluídos, então o valor da área comum varia entre 0 e a área da semicircunferência, ou seja, $0 < S < \frac{\pi \cdot 3^2}{2} = 4,5\pi$.

Portanto, a área comum não possui valor máximo.

Note que o valor $4,5\pi$ é o supremo dessa área (menor dos limitantes superiores), mas não o seu máximo, pois ele nunca é assumido.

14) Considere que N seja um número natural formado apenas por 200 algarismos iguais a 2, 200 algarismos iguais a 1 e 2015 algarismos iguais a zero. Sobre N, pode-se afirmar que:

(A) se forem acrescentados mais 135 algarismos iguais a 1, e dependendo das posições dos algarismos, N poderá ser um quadrado perfeito.

(B) independentemente das posições dos algarismos, N não é um quadrado perfeito.

(C) se forem acrescentados mais 240 algarismos iguais a 1, e dependendo das posições dos algarismos, N poderá ser um quadrado perfeito.

(D) se os algarismos da dezena e da unidade não forem iguais a 1, N será um quadrado perfeito.

(E) se forem acrescentados mais 150 algarismos iguais a 1, e dependendo das posições dos algarismos, N poderá ser um quadrado perfeito.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

(A) FALSA

Se forem acrescentados mais 135 algarismos iguais a 1, independentemente das posições dos algarismos, a nova soma dos algarismos de N é $S(N) = 600 + 135 = 735$ que é múltiplo de 3 e não é múltiplo de 9. Portanto, N não será quadrado perfeito.

(B) VERDADEIRA

A soma dos algarismos de N é $S(N) = 200 \cdot 2 + 200 \cdot 1 + 2015 \cdot 0 = 600$.

Como $3 | 600$, então N é múltiplo de 3. Mas, $9 \nmid 600$, portanto, N não é múltiplo de 9.

Assim, conclui-se que N não é quadrado perfeito.

(C) FALSA

Se forem acrescentados mais 240 algarismos iguais a 1, independentemente das posições dos algarismos, a nova soma dos algarismos de N é $S(N) = 600 + 240 = 840$ que é múltiplo de 3 e não é múltiplo de 9. Portanto, N não será quadrado perfeito.

(D) FALSA

Vide desenvolvimento da alternativa (B).

(E) FALSA

Se forem acrescentados mais 150 algarismos iguais a 1, independentemente das posições dos algarismos, a nova soma dos algarismos de N é $S(N) = 600 + 150 = 750$ que é múltiplo de 3 e não é múltiplo de 9. Portanto, N não será quadrado perfeito.

15) A equação $K^2x - Kx = K^2 - 2K - 8 + 12x$, na variável x, é impossível. Sabe-se que a equação na variável y dada por $3ay + \frac{a - 114y}{2} = \frac{17b + 2}{2}$ admite infinitas soluções. Calcule o valor de $\frac{ab + K}{4}$, e assinale a opção correta.
(A) 0
(B) 1
(C) 3
(D) 4
(E) 5

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Vamos escrever a equação $K^2x - Kx = K^2 - 2K - 8 + 12x$ na forma $Ax = B$. Assim, temos:
$K^2x - Kx = K^2 - 2K - 8 + 12x \Leftrightarrow (K^2 - K - 12)x = K^2 - 2K - 8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (K - 4)(K + 3)x = (K - 4)(K + 2)$
Como a equação acima é impossível devemos ter
$(K - 4)(K + 3) = 0 \Leftrightarrow K = 4 \lor K = -3$
$(K - 4)(K + 2) \neq 0 \Leftrightarrow K \neq 4 \land K \neq -2$
Portanto, devemos ter $K = -3$.
Vamos agora escrever a equação $3ay + \frac{a - 114y}{2} = \frac{17b + 2}{2}$ na forma $Ax = B$. Assim, temos:
$3ay + \frac{a - 114y}{2} = \frac{17b + 2}{2} \Leftrightarrow 6ay + a - 114y = 17b + 2 \Leftrightarrow (6a - 114)y = 17b - a + 2$
Como a equação acima admite infinitas soluções, devemos ter
$6a - 114 = 0 \Leftrightarrow a = 19$
$17b - a + 2 = 0 \Rightarrow 17b - 19 + 2 = 0 \Leftrightarrow b = 1$
Portanto, devemos ter $a = 19$ e $b = 1$.
Logo, $\frac{ab + K}{4} = \frac{19 \cdot 1 + (-3)}{4} = \frac{16}{4} = 4$.

16) A equação $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ possui três raízes reais. Sejam p e q números reais fixos, onde p é não nulo. Trocando x por $py + q$, a quantidade de soluções reais da nova equação é:
(A) 1
(B) 3
(C) 4
(D) 5
(E) 6

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

Sejam $r_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, as três raízes reais da equação $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

Trocando x por $py + q$, obtém-se uma nova equação $(py+q)^3 - 2(py+q)^2 - (py+q) + 2 = 0$, cujas raízes satisfazem $py + q = r_i$, $i = 1, 2, 3$.

Note que, como p é não nulo, a equação do primeiro grau $py + q = r_i$ possui uma única solução, ou seja, para cada raiz real da equação original, há uma raiz real correspondente na equação transformada. Portanto, a nova equação possui 3 soluções reais.

17) Considere que ABC é um triângulo acutângulo inscrito em uma circunferência L. A altura traçada do vértice B intersecta L no ponto D. Sabendo-se que $AD = 4$ e $BC = 8$, calcule o raio de L e assinale a opção correta.

(A) $2\sqrt{10}$

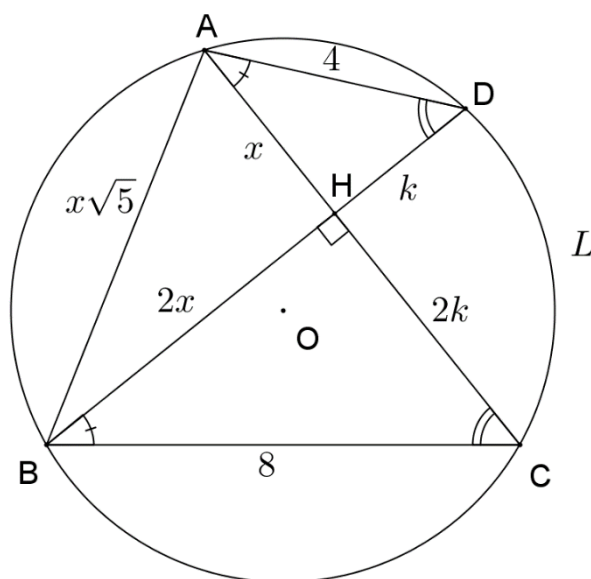
(B) $4\sqrt{10}$

(C) $2\sqrt{5}$

(D) $4\sqrt{5}$

(E) $3\sqrt{10}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

Inicialmente, observemos que, como o triângulo ABC é acutângulo, seu ortocentro é interior ao triângulo e o ponto D está no menor arco AC. Seja H o pé da altura traçada do vértice B e R o raio do círculo de centro O circunscrito ao triângulo.

Como ângulos inscritos que subentendem o mesmo arco são iguais, temos: $A\hat{C}B = A\hat{D}B$ e $C\hat{B}D = C\hat{A}D$.

Os triângulos retângulos AHD e BHC são semelhantes, pois possuem ângulos iguais. Assim, temos:

$\frac{HD}{HC}=\frac{HA}{HB}=\frac{AD}{BC}=\frac{4}{8}\Leftrightarrow\frac{HD}{HC}=\frac{HA}{HB}=\frac{1}{2}$.
Sejam $HA=x$ e $HD=k$, então $HB=2x$ e $HC=2k$.
Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo AHB, temos:
$AB^2=HA^2+HB^2\Leftrightarrow x^2+(2x)^2=5x^2\Leftrightarrow AB=x\sqrt{5}$.
Vamos agora calcular a área do triângulo ABC de duas formas diferentes.
$$S_{ABC}=S_{AHB}+S_{CHB}=\frac{x\cdot 2x}{2}+\frac{2x\cdot 2k}{2}=x^2+2kx$$
$$S_{ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot BC}{4R}=\frac{x\sqrt{5}\cdot(x+2k)\cdot 8}{4R}=\frac{2\sqrt{5}\left(x^2+2kx\right)}{R}$$
Igualando as duas expressões de S_{ABC}, temos: $x^2+2kx=\frac{2\sqrt{5}\left(x^2+2kx\right)}{R}\Leftrightarrow R=2\sqrt{5}$ u.c..

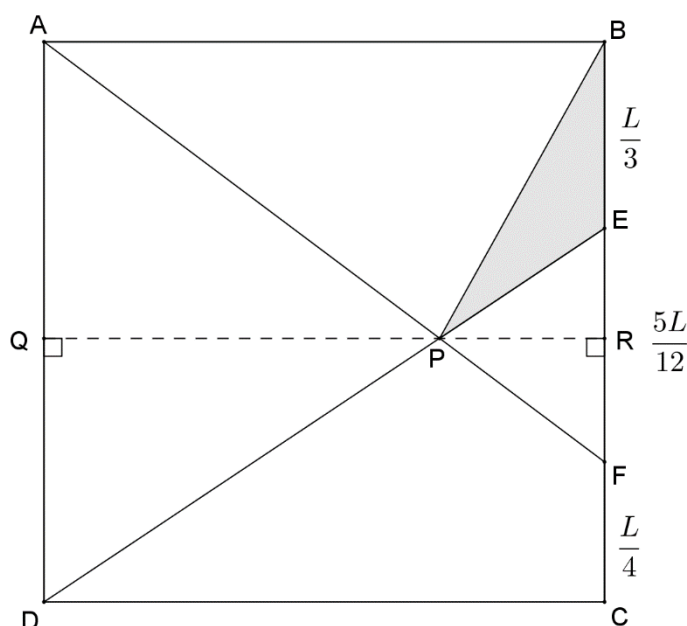
18) Sabendo que $2014^4=16452725990416$ e que $2014^2=4056196$, calcule o resto da divisão de 16452730046613 por 4058211, e assinale a opção que apresenta esse valor.
(A) 0
(B) 2
(C) 4
(D) 5
(E) 6

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Como $16452730046613=16452725990416+4056196+1$ e $4058211=4056196+2014+1$, é conveniente fazer $2014=x$.
Assim, o problema torna-se obter o resto da divisão de x^4+x^2+1 por x^2+x+1.
Vamos fatorar x^4+x^2+1. Assim, temos:
$$x^4+x^2+1=\left(x^4+2x^2+1\right)-x^2=\left(x^2+1\right)^2-x^2=\left(x^2+1+x\right)\left(x^2+1-x\right)$$
Portanto, o resto da divisão de x^4+x^2+1 por x^2+x+1 é zero, o que implica que o resto de 16452730046613 por 4058211 também é zero.

19) Sobre o lado BC do quadrado $ABCD$, marcam-se os pontos "E" e "F" tais que $\frac{BE}{BC}=\frac{1}{3}$ e $\frac{CF}{BC}=\frac{1}{4}$. Sabendo-se que os segmentos AF e ED intersectam-se em "P", qual é, aproximadamente, o percentual da área do triângulo BPE em relação à área do quadrado $ABCD$?
(A) 2
(B) 3
(C) 4
(D) 5
(E) 6

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Seja L o lado do quadrado $ABCD$.
Vamos analisar os pontos de divisão do lado BC.

$$\frac{BE}{BC}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{BE}{L}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow BE=\frac{L}{3}$$

$$\frac{CF}{BC}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{CF}{L}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow CF=\frac{L}{4}$$

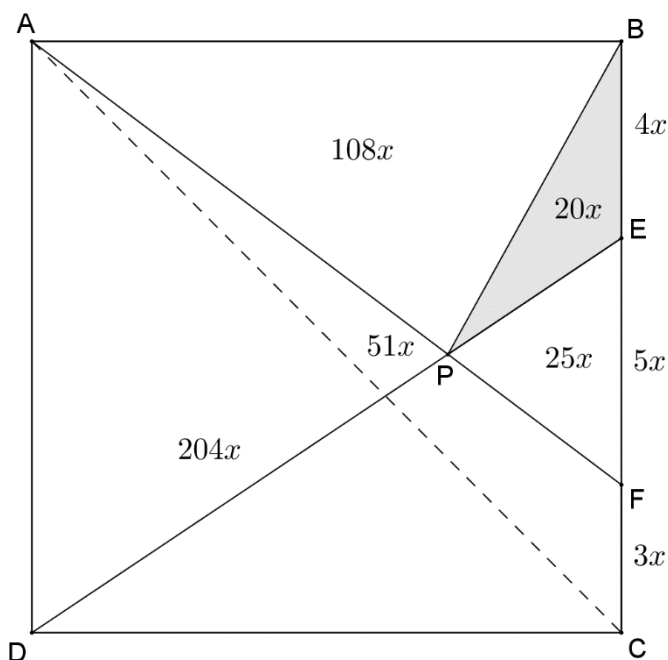
O segmento EF é então dado por $EF=BC-BE-CF=L-\frac{L}{3}-\frac{L}{4}=\frac{5L}{12}$.

Como $EF\parallel AD$, os triângulos EPF e DPA são semelhantes. Assim, temos:

$$\frac{PR}{PQ}=\frac{EF}{AD}=\frac{5L/12}{L}=\frac{5}{12}\Leftrightarrow\frac{PR}{5}=\frac{PQ}{12}=\frac{PR+PQ}{5+12}=\frac{L}{17}\Leftrightarrow PR=\frac{5L}{17}\wedge\ PQ=\frac{12L}{17}.$$

A área do triângulo BPE é dada por $S_{BPE}=\frac{BE\cdot PR}{2}=\frac{\frac{L}{3}\cdot\frac{5L}{17}}{2}=\frac{5L^2}{102}$.

Assim, $\frac{S_{BPE}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{5L^2}{102}}{L^2}=\frac{5}{102}\approx 5\%$.

Vamos fazer uma solução alternativa, utilizando razões entre áreas.

Supondo, sem perda de generalidade, que o lado do quadrado $ABCD$ é igual a $12x$. Assim, temos:

$$\frac{BE}{BC}=\frac{BE}{12x}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow BE=4x$$

$$\frac{CF}{BC}=\frac{CF}{12x}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow CF=3x$$

O segmento EF é então dado por $EF=BC-BE-CF=12x-4x-3x=5x$.

Como $EF\,||\,AD$, os triângulos EPF e DPA são semelhantes. Assim, temos:

$$\frac{PF}{PA}=\frac{PE}{PD}=\frac{EF}{AD}=\frac{5x}{12x}=\frac{5}{12}.$$

Vamos agora identificar a área do triângulo BPE. Seja $S_{EPF}=25s$ e, considerando que triângulos de mesmo vértice a base sobre a mesma reta possuem áreas proporcionais às medidas de suas bases, temos:

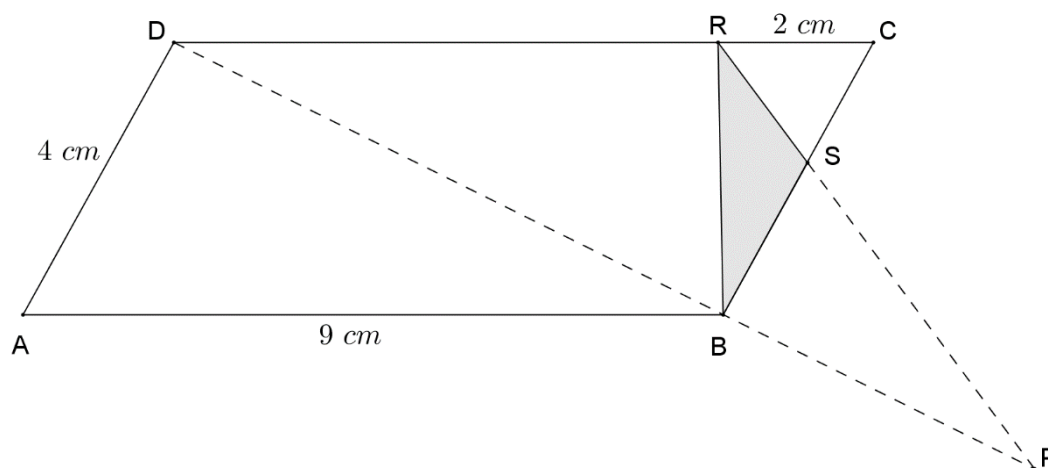
$$\frac{S_{EPF}}{S_{EPB}}=\frac{EF}{EB}=\frac{5x}{4x}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow\frac{25s}{S_{EPB}}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow S_{EPB}=20s$$

$$\frac{S_{FBP}}{S_{PBA}}=\frac{PF}{PA}=\frac{5}{12}\Leftrightarrow\frac{45s}{S_{PBA}}=\frac{5}{12}\Leftrightarrow S_{PBA}=108s$$

$$\frac{S_{BAF}}{S_{FAC}}=\frac{BF}{CF}=\frac{9x}{3x}=3\Leftrightarrow\frac{153s}{S_{FAC}}=3\Leftrightarrow S_{FAC}=51s$$

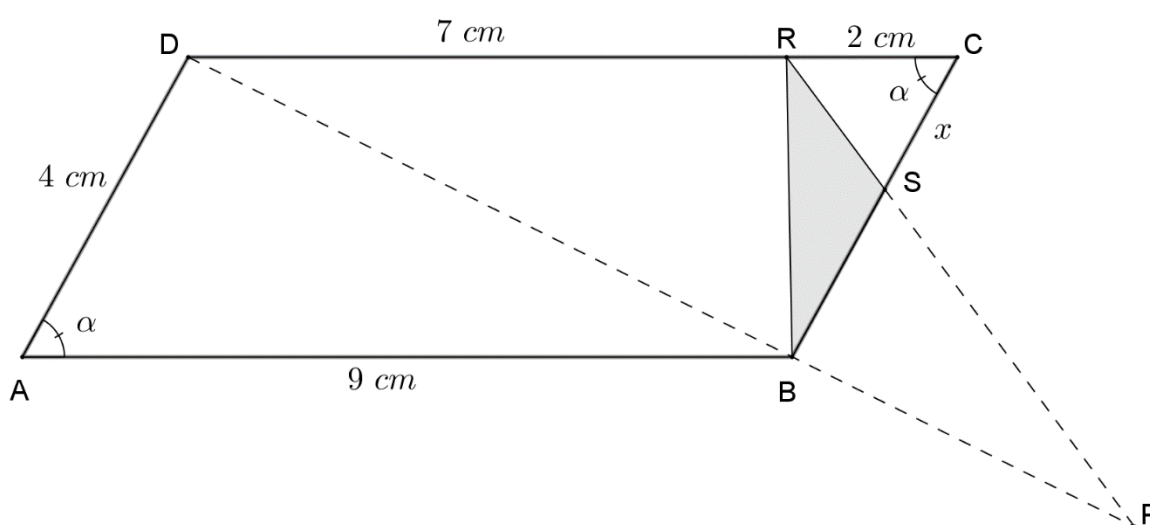
$$S_{ABCD}=2\cdot S_{ABC}=2\cdot 204s=408s$$

Portanto, a razão entre a área do triângulo BPE e a área do quadrado $ABCD$ é $\frac{S_{BPE}}{S_{ABCD}}=\frac{20s}{408s}=\frac{5}{102}\approx 5\%$.

20) Observe a figura a seguir.

Na figura, o paralelogramo $ABCD$ tem lados 9 cm e 4 cm. Sobre o lado CD está marcado o ponto R, de modo que $CR = 2 \text{ cm}$; sobre o lado BC está marcado o ponto S tal que a área do triângulo BRS seja $\frac{1}{36}$ da área do paralelogramo; e o ponto P é a interseção do prolongamento do segmento RS com o prolongamento da diagonal DB. Nessas condições, é possível concluir que a razão entre as medidas dos segmentos de reta $\frac{DP}{BP}$ vale:

(A) $13,5$
(B) 11
(C) $10,5$
(D) 9
(E) $7,5$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \operatorname{sen}\alpha = 9 \cdot 4 \cdot \operatorname{sen}\alpha = 36 \operatorname{sen}\alpha$

$$S_{BCR} = \frac{CR \cdot CB}{2} \cdot \operatorname{sen} \alpha = \frac{2 \cdot 4}{2} \cdot \operatorname{sen} \alpha = 4 \operatorname{sen} \alpha$$

$$S_{CRS} = \frac{CR \cdot CS}{2} \cdot \operatorname{sen} \alpha = \frac{2 \cdot x}{2} \cdot \operatorname{sen} \alpha = x \operatorname{sen} \alpha$$

$$S_{BRS} = S_{BCR} - S_{CRS} = 4 \operatorname{sen} \alpha - x \operatorname{sen} \alpha = (4 - x) \operatorname{sen} \alpha$$

$$\frac{S_{BRS}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{36} \Leftrightarrow \frac{(4-x) \operatorname{sen} \alpha}{36 \operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{36} \Leftrightarrow 4 - x = 1 \Leftrightarrow x = 3$$

Aplicando o teorema de Menelaus ao triângulo BCD com ceviana PSR, temos:

$$\frac{PB}{PD} \cdot \frac{SC}{SB} \cdot \frac{RD}{RC} = 1 \Leftrightarrow \frac{PB}{PD} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{7}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{DP}{BP} = \frac{21}{2} = 10,5.$$

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2013/2014

1) Sejam $P=\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{11}\right)$ e $Q=\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)$. Qual é o valor de $\sqrt{\frac{P}{Q}}$?

(A) $\sqrt{2}$
(B) 2
(C) $\sqrt{5}$
(D) 3
(E) 5

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$$P=\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{11}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{12}{11}$$

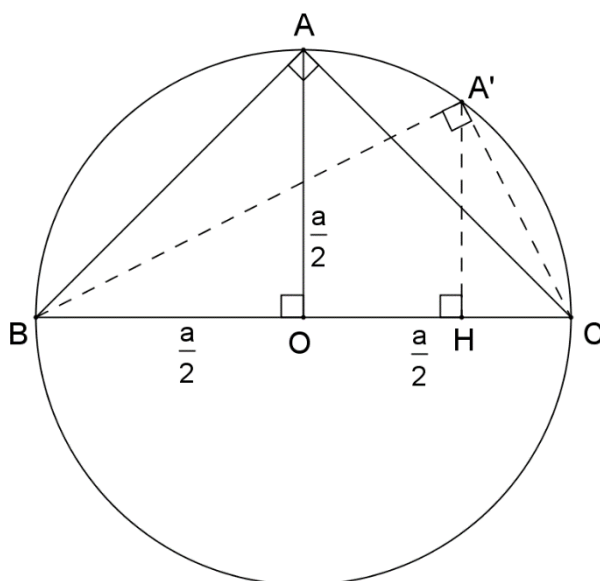
$$Q=\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{11}$$

$$\frac{P}{Q}=\frac{4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12}{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}\cdot\frac{5\cdot7\cdot9\cdot11}{4\cdot6\cdot8\cdot10}=\frac{12}{3}=4\Rightarrow\sqrt{\frac{P}{Q}}=\sqrt{4}=2$$

2) Sabendo que ABC é um triângulo retângulo de hipotenusa $BC=a$, qual é o valor máximo da área de ABC?

(A) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$
(B) $\frac{a^2}{4}$
(C) $\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$
(D) $\frac{3a^2}{4}$
(E) $\frac{3a^2}{2}$

REPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

O triângulo retângulo ABC de hipotenusa $BC = a$ está inscrito em uma circunferência de diâmetro BC. Assim, cada ponto sobre essa circunferência (exceto B e C) determina um triângulo retângulo ABC.
A área de cada um desses triângulos é dada pelo semiproduto da hipotenusa pela altura relativa à hipotenusa, ou seja, $S_{ABC} = \frac{a \cdot h_A}{2}$. Sabendo que a medida da hipotenusa é constante, então o triângulo de área máxima será aquele que tiver a altura relativa à hipotenusa máxima. Como o vértice A está sobre a circunferência de diâmetro $BC = a$, então o valor máximo da altura relativa à hipotenusa é igual ao raio da circunferência, ou seja, $(h_A)_{MAX} = \frac{a}{2}$.
Portanto, o valor da área máxima do triângulo retângulo ABC é
$(S_{ABC})_{MAX} = \frac{a \cdot (h_A)_{MAX}}{2} = \frac{a \cdot (a/2)}{2} = \frac{a^2}{4}$ unidades de área.

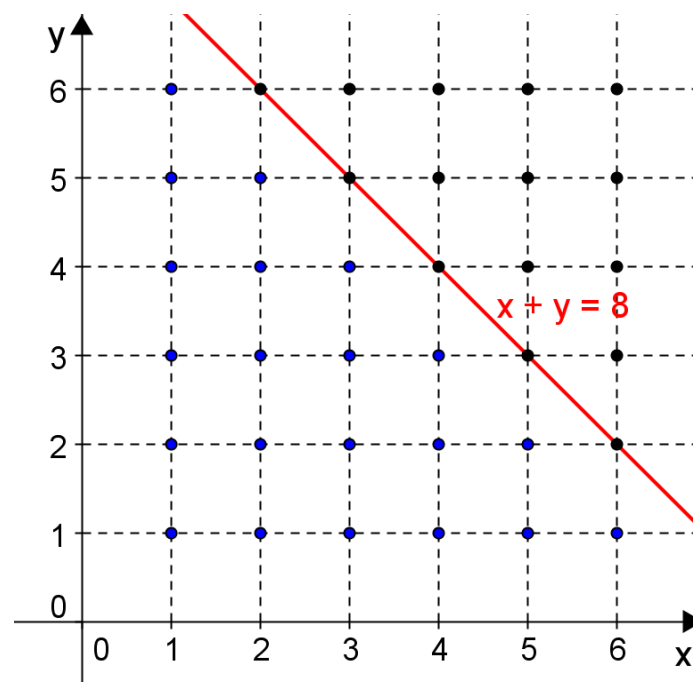
3) Considere um conjunto de 6 meninos com idades diferentes e um outro conjunto com 6 meninas também com idades diferentes. Sabe-se que, em ambos os conjuntos, as idades variam de 1 ano até 6 anos. Quantos casais podem-se formar com a soma das idades inferior a 8 anos?
(A) 18
(B) 19
(C) 20
(D) 21
(E) 22

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Tendo em consideração que a soma das idades dos membros de um casal deve ser menor do que 8, temos as seguintes possibilidades para a formação de casais:
O menino de 1 ano pode fomar casal com qualquer menina, então há 6 possíveis casais.

O menino de 2 anos pode formar casal com meninas de 1 a 5 anos, então há 5 possíveis casais.
O menino de 3 anos pode formar casal com meninas de 1 a 4 anos, então há 4 possíveis casais.
O menino de 4 anos pode formar casal com meninas de 1 a 3 anos, então há 3 possíveis casais.
O menino de 5 anos pode formar casal com meninas de 1 ou 2 anos, então há 2 possíveis casais.
O menino de 6 anos pode formar casal com a menina de 1 ano, então há 1 possível casal.

Portanto, o número de casais que se pode formar é $6+5+4+3+2+1=\frac{7\cdot 6}{2}=21$.

Observe que se representássemos as idades no plano cartesiano com as idades dos meninos nas abscissas e das meninas na ordenadas, teríamos uma malha de $6\cdot 6=36$ pontos que representariam possíveis casais e os casais com soma das idades inferior a 8 anos seriam os pontos abaixo da reta $x+y=8$ (marcados de azul na figura).

4) Seja $A\cup B=\{3,5,8,9,10,12\}$ e $B\cap C_X^A=\{10,12\}$ onde A e B são subconjuntos de X, e C_X^A é o complementar de A em relação a X. Sendo assim, pode-se afirmar que o número máximo de elementos de B é

(A) 7
(B) 6
(C) 5
(D) 4
(E) 3

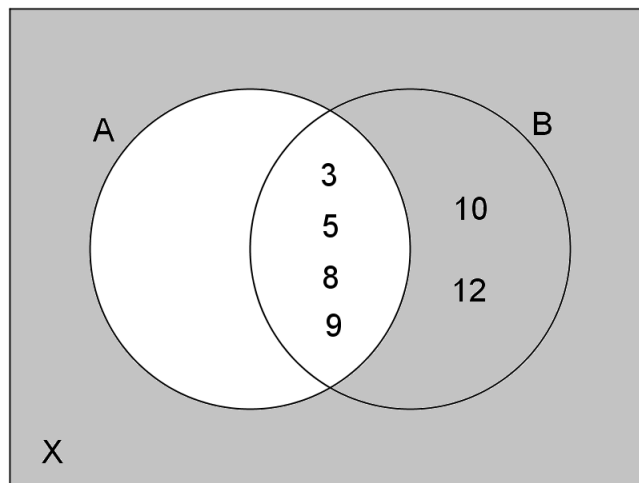
RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Inicialmente, observemos que, se $A \subset X$, então o complementar de A em relação a X está definido e $C_X^A = X - A$.

Se $B \cap C_X^A = \{10,12\}$, então 10 e 12 são elementos de B e não são elementos de A.

Se $A \cup B = \{3,5,8,9,10,12\}$, então $B \subset \{3,5,8,9,10,12\}$. Portanto, $\#(B) \le 6$.

Observe, no entanto, que $B = \{3,5,8,9,10,12\}$ e $A = \{3,5,8,9\}$ satisfazem às condições do enunciado, então o número máximo de elementos de B é 6.

Observe a situação descrita acima representada em um diagrama de Venn, onde a área sombreada representa $C_X^A = X - A$:

Note que o número máximo de elementos do conjunto B ocorre quando todos os elementos do conjunto $\{3,5,8,9\}$ estão em $A \cap B$.

5) Dada a equação $(2x+1)^2(x+3)(x-2)+6=0$, qual é a soma das duas maiores raízes reais desta equação?

(A) 0

(B) 1

(C) $\sqrt{6} - \frac{1}{2}$

(D) $\sqrt{6}$

(E) $\sqrt{6} + 1$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO: **(As opções dessa questão foram alteradas, pois não havia opção correta da maneira como a questão foi proposta originalmente.)**

Observemos inicialmente que $(x+3)+(x-2)=2x+1$, então uma boa substituição de variável é $y = \frac{2x+1}{2} = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y - \frac{1}{2}$. Dessa forma, temos:

$(2x+1)^2(x+3)(x-2)+6=0 \Rightarrow (2y)^2 \cdot \left(y-\frac{1}{2}+3\right)\cdot\left(y-\frac{1}{2}-2\right)+6=0$

$\Leftrightarrow 4y^2 \cdot \left(y+\frac{5}{2}\right)\cdot\left(y-\frac{5}{2}\right)+6=0 \Leftrightarrow 4y^2\cdot\left(y^2-\frac{25}{4}\right)+6=0$

$\Leftrightarrow 4y^4-25y^2+6=0$

Note que a substituição de variável efetuada apresentou como resultado uma equação biquadrada. Vamos resolvê-la.

$y^2=\frac{25\pm\sqrt{(-25)^2-4\cdot4\cdot6}}{2\cdot4}=\frac{25\pm23}{8}\Leftrightarrow y^2=\frac{1}{4} \vee y^2=6 \Leftrightarrow y=\pm\frac{1}{2} \vee y=\pm\sqrt{6}$

Retornando a substituição, temos:

$x_1=\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=-1$; $x_2=\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=0$; $x_3=-\sqrt{6}-\frac{1}{2}$; $x_4=\sqrt{6}-\frac{1}{2}$

Portanto, o conjunto solução da equação é $S=\left\{-\sqrt{6}-\frac{1}{2},-1,0,\sqrt{6}-\frac{1}{2}\right\}$ e a soma das duas maiores raízes reais é $0+\left(\sqrt{6}-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{6}-\frac{1}{2}$.

Uma solução alternativa e, talvez, mais intuitiva seria efetuar a conta e identificar raízes por inspeção.

$(2x+1)^2(x+3)(x-2)+6=0 \Leftrightarrow (4x^2+4x+1)(x^2+x-6)+6=0 \Leftrightarrow 4x^4+8x^3-19x^2-23x=0$

$\Leftrightarrow x(4x^3+8x^2-19x-23)=0$

Por inspeção, identificamos que $x=-1$ é raiz da equação $4x^3+8x^2-19x-23=0$, pois $4\cdot(-1)^3+8\cdot(-1)^2-19\cdot(-1)-23=0$, ou seja, $x+1$ é um fator de $4x^3+8x^2-19x-23$.

Vamos aplicar o algoritmo de Briot-Ruffini para efetuar a divisão de $4x^3+8x^2-19x-23$ por $x+1$.

	4	8	–19	–23
–1	4	4	–23	0

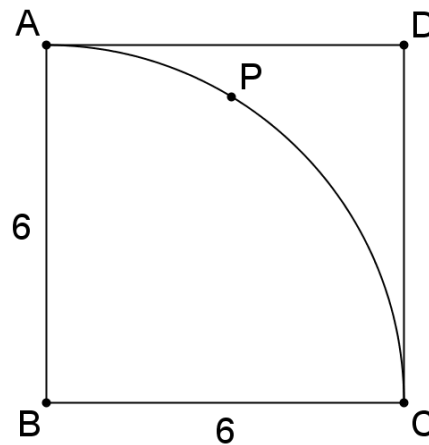
Assim, temos $4x^3+8x^2-19x-23=(x+1)(4x^2+4x-23)$.

Portanto, a equação original pode ser escrita como $x(x+1)(4x^2+4x-23)=0$.

As raízes da equação do 2º grau $4x^2+4x-23=0$ são dadas por

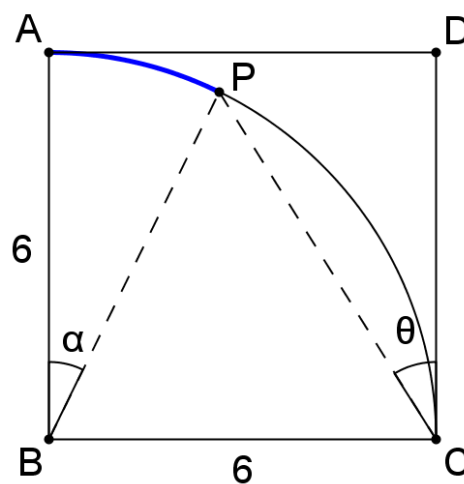
$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot4\cdot(-23)}}{2\cdot4}=\frac{-4\pm8\sqrt{6}}{8}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{6}$.

Portanto, o conjunto solução da equação é $S=\left\{-\sqrt{6}-\frac{1}{2},-1,0,\sqrt{6}-\frac{1}{2}\right\}$ e a soma das duas maiores raízes reais é $0+\left(\sqrt{6}-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{6}-\frac{1}{2}$.

6) Analise a figura a seguir.

A figura acima exibe o quadrado $ABCD$ e o arco de circunferência APC com centro em B e raio $AB = 6$. Sabendo que o arco AP da figura tem comprimento $\frac{3\pi}{5}$, é correto afirmar que o ângulo PCD mede:

(A) 36°
(B) 30°
(C) 28°
(D) 24°
(E) 20°

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

Na figura acima, sejam $A\hat{B}P = \alpha$ e $P\hat{C}D = \theta$.
O comprimento de um arco de circunferência de raio r determinado por um ângulo central α rad é $\ell = \alpha \cdot r$.

Logo, se o arco AP tem comprimento $\frac{3\pi}{5}$, então o ângulo $A\hat{B}P$ em radianos é dado por $\alpha \cdot 6 = \frac{3\pi}{5} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{10} \text{ rad} = \frac{180^\circ}{10} = 18^\circ$.

Como o $\#ABCD$ é um quadrado, então $A\hat{B}C = 90^\circ$ e $P\hat{B}C = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$.

O ângulo $P\hat{B}C = 72^\circ$ é o ângulo central que determina o arco PC, então $PC = 72^\circ$.

Como $CD \perp BC$, então o ângulo $P\hat{C}D = \theta$ é um ângulo de segmento, o que implica $\theta = \frac{PC}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$.

7) Qual é o valor da expressão $\left[\left(3^{0,333\ldots}\right)^{27} + 2^{2^{1^7}} - \sqrt[5]{239 + \sqrt[3]{\frac{448}{7}}} - \left(\sqrt[3]{3}\right)^{3^3}\right]^{\sqrt[7]{92}}$?

(A) $0,3$

(B) $\sqrt[3]{3}$

(C) 1

(D) 0

(E) -1

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$\left[\left(3^{0,333\ldots}\right)^{27} + 2^{2^{1^7}} - \sqrt[5]{239 + \sqrt[3]{\frac{448}{7}}} - \left(\sqrt[3]{3}\right)^{3^3}\right]^{\sqrt[7]{92}} =$$

$$= \left[\left(3^{1/3}\right)^{27} + 2^{2^1} - \sqrt[5]{239 + \sqrt[3]{64}} - \left(3^{1/3}\right)^{27}\right]^{\sqrt[7]{92}} =$$

$$= \left[2^2 - \sqrt[5]{239 + 4}\right]^{\sqrt[7]{92}} = \left[4 - \sqrt[5]{243}\right]^{\sqrt[7]{92}} =$$

$$= \left[4 - \sqrt[5]{3^5}\right]^{\sqrt[7]{92}} = \left[4 - 3\right]^{\sqrt[7]{92}} = (1)^{\sqrt[7]{92}} = 1$$

8) Analise as afirmativas abaixo, em relação ao triângulo ABC.

I - Seja $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$. Se o ângulo interno no vértice A é reto, então $a^2 = b^2 + c^2$.

II - Seja $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$. Se $a^2 = b^2 + c^2$, então o ângulo interno no vértice A é reto.

III - Se M é ponto médio de BC e $AM = \frac{BC}{2}$, ABC é retângulo.

IV – Se ABC é retângulo, então o raio de seu círculo inscrito pode ser igual a três quartos da hipotenusa.

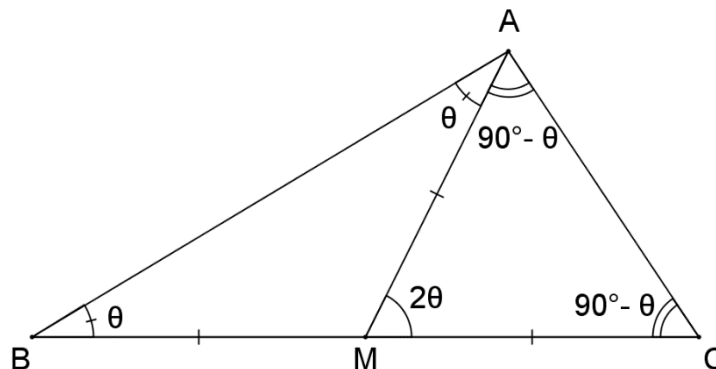
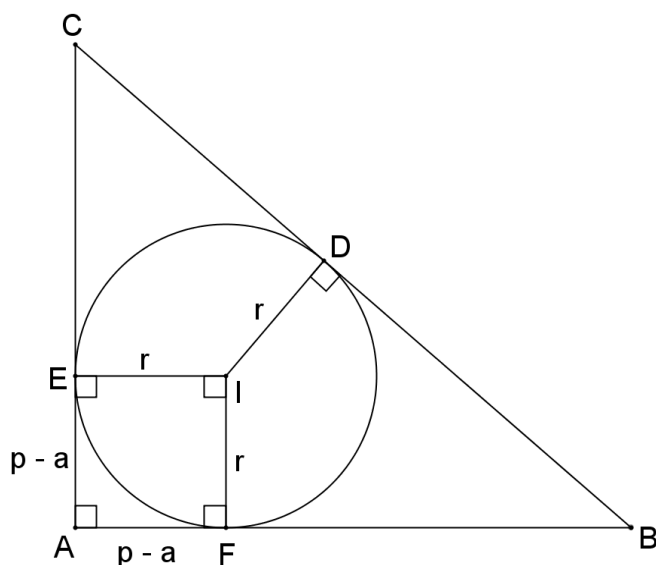
Assinale a opção correta.

(A) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.

(B) Apenas a afirmativa I é verdadeira.

(C) Apenas as afirmativas II e IV são verdadeiras.
(D) Apenas as afirmativas I, II e III são verdadeiras.
(E) Apenas as afirmativas II, III e IV são verdadeiras.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
I – VERDADEIRA
Se $\hat{A} = 90^\circ$, então o triângulo ABC é retângulo de hipotenusa $BC = a$ e vale o teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$.
II – VERDADEIRA
Se $a^2 = b^2 + c^2$, então o ângulo oposto ao lado $BC = a$ é reto, ou seja, $\hat{A} = 90^\circ$. Esse resultado é uma consequência da recíproca do teorema de Pitágoras, da Síntese de Clairaut ou da lei dos cossenos, como mostraremos a seguir.
Pela lei dos cossenos, temos $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$. Substituindo $a^2 = b^2 + c^2$ na expressão anterior, resulta $b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \Leftrightarrow 2bc \cdot \cos \hat{A} = 0 \Leftrightarrow \cos \hat{A} = 0 \Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ$.
III – VERDADEIRA
A afirmação estabelece que se a medida de uma mediana é igual à metade da medida do lado a que ela se refere, então o triângulo é retângulo. Nós sabemos que a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à metade da hipotenusa, o que é pedido é a "volta" dessa afirmação.
Vamos analisar a situação com auxílio da figura a seguir:

Se M é ponto médio de BC e $AM = \frac{BC}{2}$, então $AM = BM = CM$ e os triângulos AMB e AMC são isósceles.
Fazendo $A\hat{B}M = B\hat{A}M = \theta$, o ângulo externo $A\hat{M}C$ é tal que $A\hat{M}C = A\hat{B}M + B\hat{A}M = \theta + \theta = 2\theta$.
No triângulo isóscele s AMC, temos $C\hat{A}M = A\hat{C}M = \frac{180^\circ - 2\theta}{2} = 90^\circ - \theta$.
Portanto, o ângulo do vértice A é dado por $\hat{A} = B\hat{A}C = B\hat{A}M + C\hat{A}M = \theta + (90^\circ - \theta) = 90^\circ$, ou seja, o triângulo ABC é retângulo de hipotenusa BC.
IV – FALSA
Lema: Seja um triângulo retângulo ABC de hipotenusa $BC = a$ e semiperímetro p, então o raio do círculo inscrito é $r = p - a$.

Demonstração:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{IE} \perp \overline{AC} \ \wedge \ \overline{IF} \perp \overline{AB} \\ \overline{IE} = \overline{IF} = r\end{array}\right\} \Rightarrow \# IEAF \text{ é um quadrado} \Rightarrow r = \overline{AE} = \overline{AF} = p - a$$

Voltando a afirmação do enunciado e usando a expressão $r = p - a$, temos:

$$r = p - a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2} < \frac{a+a-a}{2} = \frac{a}{2} < \frac{3}{4}a.$$

9) Assinale a opção que apresenta o conjunto solução da equação $\frac{(-3)}{\sqrt{x^2-4}} - 1 = 0$, no conjunto dos números reais.

(A) $\{-\sqrt{13}, \sqrt{13}\}$

(B) $\{\sqrt{13}\}$

(C) $\{-\sqrt{13}\}$

(D) $\{0\}$

(E) $\varnothing$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$$\frac{(-3)}{\sqrt{x^2-4}} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{(-3)}{\sqrt{x^2-4}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4} = -3$$

Como no conjunto dos números reais $\sqrt{x^2-4}$ é sempre maior ou igual a 0, então o conjunto solução da equação é $S = \varnothing$.

10) Seja a, b, x, y números naturais não nulos. Se $a\cdot b=5$, $k=\dfrac{2^{(a+b)^2}}{2^{(a-b)^2}}$ e $x^2-y^2=\sqrt[5]{k}$, qual é o algarismo das unidades do número $\left(y^x-x^y\right)$?

(A) 2
(B) 3
(C) 5
(D) 7
(E) 8

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$$k=\frac{2^{(a+b)^2}}{2^{(a-b)^2}}=2^{(a+b)^2-(a-b)^2}=2^{4ab}=\left(2^4\right)^{ab}=16^5$$

$$x^2-y^2=\sqrt[5]{k}=\sqrt[5]{16^5}=16\Leftrightarrow(x+y)(x-y)=16$$

Logo, $(x+y)$ e $(x-y)$ são divisores naturais de 16, ou seja, pertencem ao conjunto $d(16)=\{1,2,4,8,16\}$.

Note que $(x+y)+(x-y)=2x$, então $(x+y)$ e $(x-y)$ têm a mesma paridade.

Além disso, como x e y são números naturais não nulos, então $x+y>x-y$.

Dessa forma, devemos ter $x+y=8$ e $x-y=2$, o que implica $x=5$ e $y=3$.

Portanto, $\left(y^x-x^y\right)=\left(3^5-5^3\right)=(243-125)=118$, cujo algarismo das unidades é 8.

11) Sabe-se que a média aritmética dos algarismos de todos os números naturais desde 10 até 99, inclusive, é k. Sendo assim, pode-se afirmar que o número $\dfrac{1}{k}$ é

(A) natural.
(B) decimal exato.
(C) dízima periódica simples.
(D) dízima periódica composta.
(E) decimal infinito sem período.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi alterado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi proposta originalmente.)**

Cada algarismo de 1 a 9 aparece 9 vezes como algarismo das unidades e 10 vezes como algarismo das dezenas. Portanto, a soma dos algarismos de todos os números naturais desde 10 até 99, inclusive, é dada por

$$S=(1+2+3+4+5+6+7+8+9)\cdot 19=\frac{(1+9)\cdot 9}{2}\cdot 19=45\cdot 19$$

Desde 10 até 99, inclusive, há $(99-10)+1=90$ números de 2 algarismos, ou seja, um total de $2\cdot 90=180$ algarismos.

Logo, a média aritmética dos algarismos de todos os números naturais desde 10 até 99, inclusive, é dada por $k=\frac{45\cdot 19}{180}=\frac{19}{4}$.

Assim, $\frac{1}{k}=\frac{4}{19}$ que só possui fatores diferentes de 2 e 5 no denominador, o que implica que o número $\frac{1}{k}$ é uma dízima periódica simples.

12) Uma das raízes da equação do 2° grau $ax^2+bx+c=0$, com a, b, c pertencentes ao conjunto dos números reais, sendo $a\neq 0$, é igual a 1. Se $b-c=5a$ então, b^c em função de a é igual a

(A) $-3a^2$

(B) 2^a

(C) $2a\cdot 3^a$

(D) $\frac{1}{(2a)^{3a}}$

(E) $\frac{1}{2^{(3a)}\cdot a^{(3+a)}}$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Se 1 é raiz da equação $ax^2+bx+c=0$, então $a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=0\Leftrightarrow a+b+c=0\Leftrightarrow b+c=-a$.

Dessa forma, b e c ficam determinados, em função de a, pelo sistema: $\begin{cases} b+c=-a \\ b-c=5a \end{cases}$.

Resolvendo o sistema, temos $b=2a$ e $c=-3a$.

Portanto, $b^c=(2a)^{-3a}=\frac{1}{(2a)^{3a}}$.

13) Seja ABC um triângulo acutângulo e "L" a circunferência circunscrita ao triângulo. De um ponto Q (diferente de A e de C) sobre o menor arco AC de "L" são traçadas perpendiculares às retas suportes dos lados do triângulo. Considere M, N e P os pés das perpendiculares sobre os lados AB, AC e BC respectivamente. Tomando $MN=12$ e $PN=16$, qual é a razão entre as áreas dos triângulos BMN e BNP?

(A) $\frac{3}{4}$

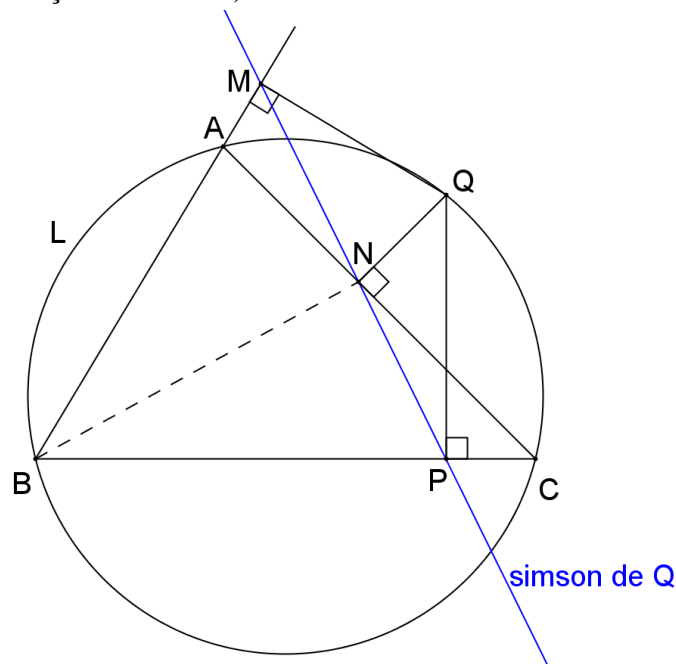
(B) $\frac{9}{16}$

(C) $\frac{8}{9}$

(D) $\frac{25}{36}$

(E) $\frac{36}{49}$

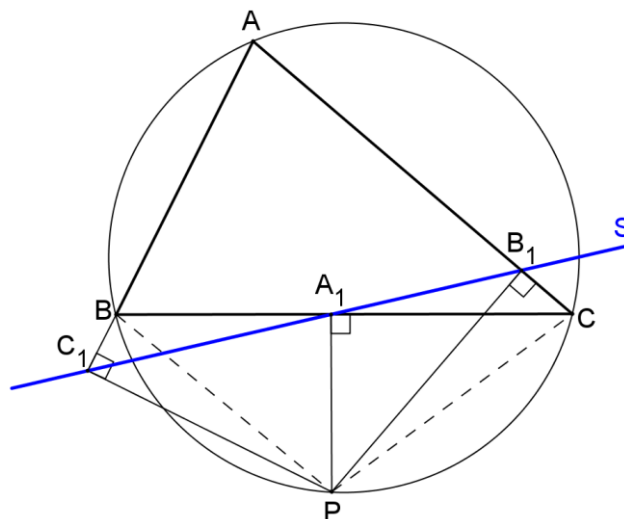
RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Inicialmente, observemos que os pontos M, N e P são colineares (esses pontos estão sobre a reta simson do ponto Q em relação ao ΔABC).

Como os pontos M, N e P são colineares, então os triângulos BMN e BNP têm bases sobre a mesma reta suporte (a simson de Q), o que implica que os triângulos possuem altura comum no vértice B.

Sabemos que, para triângulos que possuem altura comum, a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases. Assim, temos:

$\frac{S_{BMN}}{S_{BNP}} = \frac{MN}{PN} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

NOTA 2: Reta Simson

Os pés das três perpendiculares traçadas de um ponto do círculo circunscrito a um triângulo aos lados do triângulo são colineares, sendo a reta que contém esses três pontos chamada **reta de simson do ponto P**.

Demonstração:

$B\hat{C}_1P = B\hat{A}_1P = 90^o \Rightarrow B\hat{C}_1P + B\hat{A}_1P = 180^o \Rightarrow \# BA_1PC_1$ é inscritível $\Rightarrow B\hat{P}C_1 = B\hat{A}_1C_1$

$P\hat{A}_1C = P\hat{B}_1C = 90^o \Rightarrow \# PA_1B_1C$ é inscritível $\Rightarrow C\hat{A}_1B_1 = C\hat{P}B_1$

$A\hat{C}_1P = A\hat{B}_1P = 90^o \Rightarrow A\hat{C}_1P + A\hat{B}_1P = 180^o \Rightarrow \# AB_1PC_1$ é inscritível $\Rightarrow B_1\hat{P}C_1 = 180^o - \hat{A}$

P está no círculo circunscrito ao $\Delta ABC \Rightarrow \# ABPC$ é inscritível $\Rightarrow B\hat{P}C = 180^o - \hat{A}$

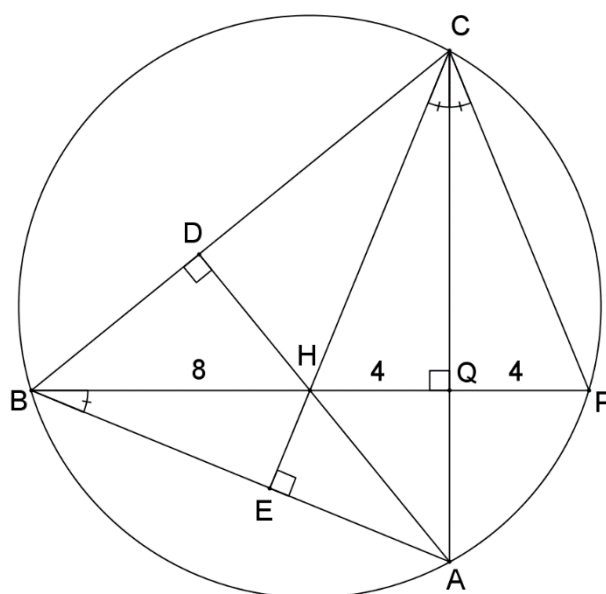
$\Rightarrow B_1\hat{P}C_1 = B\hat{P}C \Rightarrow B_1\hat{P}B + B\hat{P}C_1 = B\hat{P}B_1 + B_1\hat{P}C \Leftrightarrow B\hat{P}C_1 = B_1\hat{P}C \Rightarrow B\hat{A}_1C_1 = C\hat{A}_1B_1$

Logo, os pontos C_1, A_1 e B_1 são colineares.

14) Sabe-se que o ortocentro H de um triângulo ABC é interior ao triângulo e seja Q o pé da altura relativa ao lado AC. Prolongando BQ até o ponto P sobre a circunferência circunscrita ao triângulo, sabendo-se que $BQ = 12$ e $HQ = 4$, qual é o valor de QP?

(A) 8
(B) 6
(C) 5,5
(D) 4,5
(E) 4

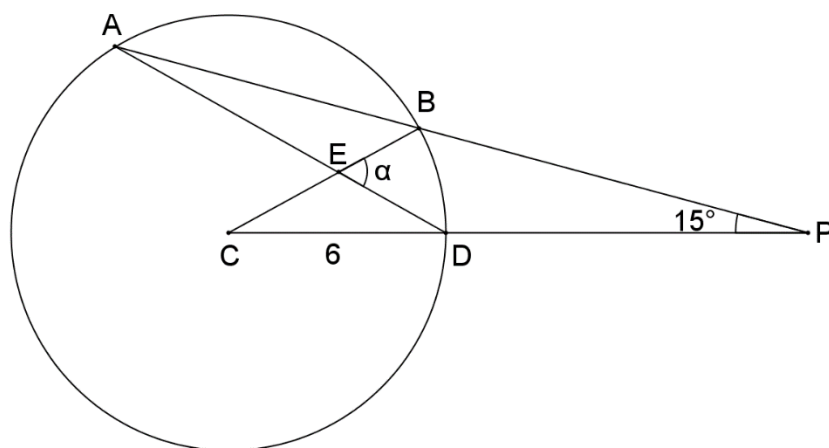
RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

Se o ortocentro de um triângulo é interior ao triângulo, então esse triângulo é acutângulo.
Sejam AD e CE as outras duas alturas do triângulo, então o ortocentro H é o ponto de interseção de BQ, AD e CE.

Como $B\hat{E}C = C\hat{Q}B = 90^\circ$, então o $\#BEQC$ é inscritível e $A\hat{B}P = A\hat{C}E$.

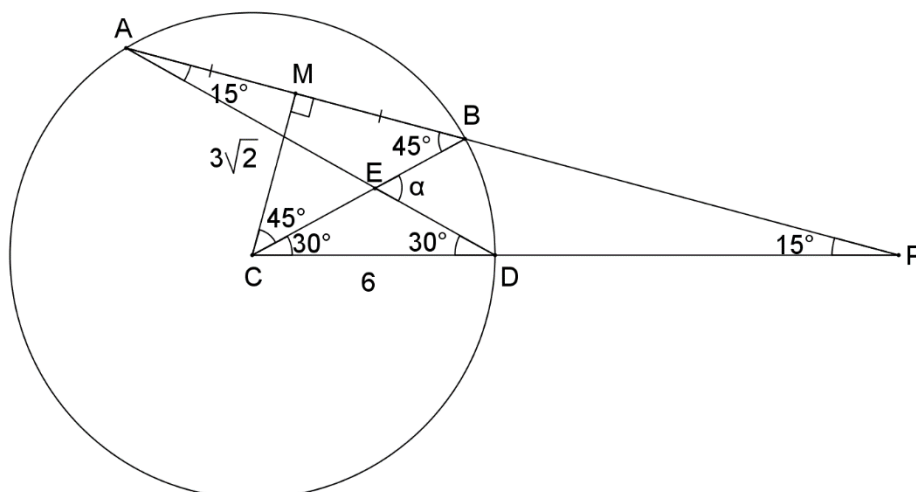
Mas, o ângulo inscrito $A\hat{C}P$ é tal que $A\hat{C}P = \dfrac{AP}{2} = A\hat{B}P = A\hat{C}E$.

Portanto, no triângulo HCP, a ceviana CQ é altura e bissetriz, o que implica que o triângulo HCP é isósceles e CQ é também mediana. Logo, $HQ = QP = 4$ u.c..

15) Analise a figura a seguir.

Na figura acima, a circunferência de raio 6 tem centro em C. De P traçam-se os segmentos PC, que corta a circunferência em D, e PA, que corta a circunferência em B. Traçam-se ainda os segmentos AD e CD, com interseção em E. Sabendo que o ângulo APC é 15° e que a distância do ponto C ao segmento de reta AB é $3\sqrt{2}$, qual é o valor do ângulo α?

(A) 75°
(B) 60°
(C) 45°
(D) 30°
(E) 15°

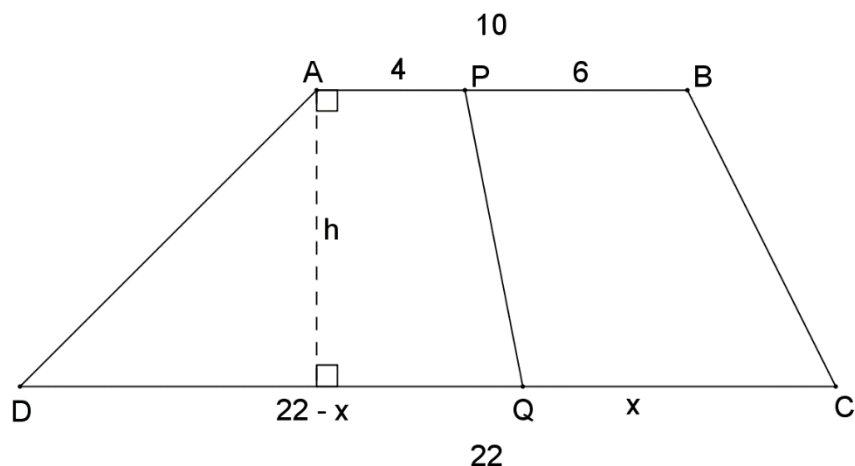
RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

Seja M o ponto médio do segmento AB, então $CM \perp AB$, o que implica $CM = 3\sqrt{2}$ (distância do ponto C ao segmento AB).
No triângulo retângulo BMC, temos $CB = 6$ e $CM = 3\sqrt{2}$, então
$\text{sen}\, C\hat{B}M = \frac{CM}{CM} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow C\hat{B}M = 45^\circ$ e $B\hat{C}M = 45^\circ$.
No triângulo retângulo PMC, temos $P\hat{C}M = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$, então
$D\hat{C}B = D\hat{C}M - B\hat{C}M = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$.
Como o ângulo $D\hat{C}B = 30^\circ$ é um ângulo central, então $BD = 30^\circ$ e o ângulo inscrito $B\hat{A}D = \frac{BD}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$.
O ângulo $A\hat{D}C$ é ângulo externo do triângulo ADP, então $A\hat{D}C = D\hat{A}P + D\hat{P}A = 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$.
O ângulo $B\hat{E}D = \alpha$ é ângulo externo do triângulo CDE, então $\alpha = E\hat{C}D + E\hat{D}C = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$.

16) Considere que $ABCD$ é um trapézio, onde os vértices são colocados em sentido horário, com bases $AB = 10$ e $CD = 22$. Marcam-se na base AB o ponto P e na base CD o ponto Q, tais que $AP = 4$ e $CQ = x$. Sabe-se que as áreas dos quadriláteros $APQD$ e $PBCQ$ são iguais. Sendo assim, pode-se afirmar que a medida x é:
(A) 10
(B) 12
(C) 14

(D) 15
(E) 16

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

Sabendo que o quadrilátero $ABCD$ é um trapézio de bases AB e CD, então $AB \parallel CD$.
Os quadriláteros $APQD$ e $PBCQ$ possuem bases sobre os segmentos paralelos AB e CD, então são trapézio de mesma altura h (distância entre AB e CD).
Como os quadriláteros $APQD$ e $PBCQ$ possuem a mesma área, então temos:

$$S_{APQD} = S_{PBCQ} \Leftrightarrow (22 - x + 4) \cdot \frac{h}{2} = (x + 6) \cdot \frac{h}{2} \Leftrightarrow 26 - x = x + 6 \Leftrightarrow x = 10 \text{ u.c.}.$$

17) O maior inteiro "n", tal que $\frac{n^2 + 37}{n + 5}$ também é inteiro, tem como soma dos seus algarismos um valor igual a
(A) 6
(B) 8
(C) 10
(D) 12
(E) 14

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$$\frac{n^2 + 37}{n + 5} = \frac{n^2 - 25 + 25 + 37}{n + 5} = \frac{(n + 5)(n - 5) + 62}{n + 5} = (n - 5) + \frac{62}{n + 5} \in \mathbb{Z}$$

Para que o número acima seja inteiro, $(n + 5)$ deve ser divisor de 62.
O maior inteiro n para o qual $(n + 5)$ é divisor de 62 ocorre quando $(n + 5)$ é igual ao maior divisor inteiro de 62, ou seja, o próprio 62. Assim, temos: $n + 5 = 62 \Leftrightarrow n = 57$ cuja soma dos algarismos é $5 + 7 = 12$.

18) Dado que a e b são números reais não nulos, com $b \neq 4a$, e que $\begin{cases} 1+\dfrac{2}{ab}=5 \\ \dfrac{5-2b^2}{4a-b}=4a+b \end{cases}$, qual é o valor de $16a^4b^2-8a^3b^3+a^2b^4$?

(A) 4
(B) $\dfrac{1}{18}$
(C) $\dfrac{1}{12}$
(D) 18
(E) $\dfrac{1}{4}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Inicialmente, observemos que a condição $b \neq 4a$ garante que o denominador $4a-b$ que aparece no sistema é não nulo.

$$\begin{cases} 1+\dfrac{2}{ab}=5 \Leftrightarrow \dfrac{2}{ab}=4 \Leftrightarrow ab=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{5-2b^2}{4a-b}=4a+b \Leftrightarrow 5-2b^2=16a^2-b^2 \Leftrightarrow 16a^2+b^2=5 \end{cases}$$

$$16a^4b^2-8a^3b^3+a^2b^4=a^2b^2\left(16a^2+b^2\right)-8a^3b^3=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 5-8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$$

19) Sabendo que $2^x \cdot 3^{4y+x} \cdot (34)^y$ é o menor múltiplo de 17 que pode-se obter para x e y inteiros não negativos, determine o número de divisores positivos da soma de todos os algarismos desse número, e assinale a opção correta.

(A) 12
(B) 10
(C) 8
(D) 6
(E) 4

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$$2^x \cdot 3^{4y+x} \cdot (34)^y = 2^x \cdot 3^{4y+x} \cdot (2\cdot 17)^y = 2^x \cdot 3^{4y+x} \cdot 2^y \cdot 17^y = 2^{x+y} \cdot 3^{4y+x} \cdot 17^y$$

Para que o número acima seja o menor múltiplo de 17 que pode-se obter para x e y inteiros não negativos, devemos ter $y=1$ e $x=0$.

Assim, o número resultante é $2^{0+1} \cdot 3^{4 \cdot 1+0} \cdot 17^1 = 2^1 \cdot 3^4 \cdot 17 = 2754$, cuja soma dos algarismos é $2+7+5+4=18$.

A quantidade de divisores inteiros positivos de $18 = 2 \cdot 3^2$ é $d(18) = (1+1) \cdot (2+1) = 6$.

20) Considere, no conjunto dos números reais, a desigualdade $\frac{2x^2 - 28x + 98}{x - 10} \geq 0$. A soma dos valores inteiros do conjunto solução desta desigualdade, que são menores do que $\frac{81}{4}$, é

(A) 172
(B) 170
(C) 169
(D) 162
(E) 157

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO: **(As opções dessa questão foram alteradas, pois não havia opção correta da maneira como a questão foi proposta originalmente.)**

$$\frac{2x^2 - 28x + 98}{x - 10} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot (x^2 - 14x + 49)}{x - 10} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot (x - 7)^2}{x - 10} \geq 0 \Leftrightarrow x = 7 \vee x - 10 > 0 \Leftrightarrow x = 7 \vee x > 10$$

Portanto, o conjunto solução da inequação é $S = \{7\} \cup]10, +\infty[$.

Os valores inteiros do conjunto solução que são menores que $\frac{81}{4} = 20,25$ são $7, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$, cuja soma é $7 + \frac{(11+20) \cdot 10}{2} = 162$.

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2012/2013

1) Para $x = 2013$, qual é o valor da expressão $(-1)^{6x} - (-1)^{x-3} + (-1)^{5x} - (-1)^{x+3} - (-1)^{4x} - (-1)^{2x}$?
(A) -4
(B) -2
(C) 0
(D) 1
(E) 4

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Observe inicialmente que: $(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{se n é par} \\ -1, & \text{se n é ímpar} \end{cases}$
Para $x = 2013$, todos os expoentes, exceto $5x$ são pares. Assim, temos:
$(-1)^{6x} - (-1)^{x-3} + (-1)^{5x} - (-1)^{x+3} - (-1)^{4x} - (-1)^{2x} = 1 - (1) + (-1) - (1) - (1) - (1) = -4$.

2) Analise as afirmativas a seguir.
I) $9,\overline{1234} > 9,123\overline{4}$
II) $\dfrac{222221}{222223} > \dfrac{555550}{555555}$
III) $\sqrt{0,444\ldots} = 0,222\ldots$
IV) $2^{\sqrt[3]{27}} = 64^{0,5}$
Assinale a opção correta.
(A) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
(B) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(C) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
(D) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
(E) Apenas as afirmativas II e IV são verdadeiras.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
I) FALSA
$9,\overline{1234} = 9,1234\boxed{1}234\ldots < 9,1234\boxed{4}4\ldots = 9,123\overline{4}$
II) VERDADEIRA
Seja $x = 111111$, então
$$\frac{222221}{222223} - \frac{555550}{555555} = \frac{2x-1}{2x+1} - \frac{5x-5}{5x} = \left(1 - \frac{2}{2x+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{2}{2x+1} = \frac{1}{x(2x+1)} > 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{222221}{222223} > \frac{555550}{555555}$$
III) FALSA

$\sqrt{0,444\ldots} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} = \frac{6}{9} = 0,666\ldots \neq 0,222\ldots$

IV) VERDADEIRA

$2^{\sqrt[3]{27}} = 2^3 = 8$

$64^{0,5} = \left(8^2\right)^{0,5} = 8^{2\cdot 0,5} = 8$

3) Um trapézio isósceles tem lados não paralelos medindo $10\sqrt{3}$. Sabendo que a bissetriz interna da base maior contém um dos vértices do trapézio e é perpendicular a um dos lados não paralelos, qual é a área desse trapézio?

(A) $75\sqrt{3}$

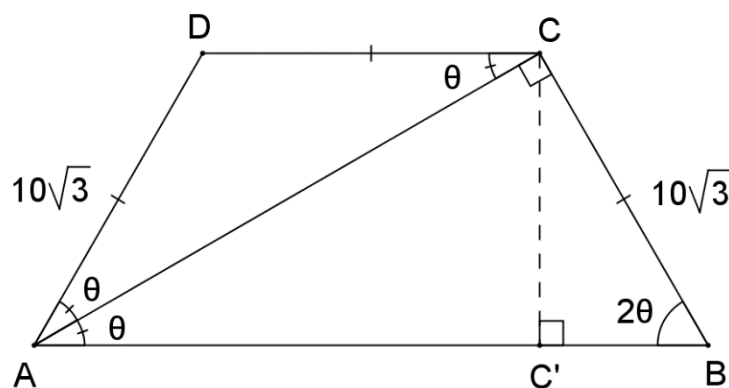
(B) $105\sqrt{3}$

(C) $180\sqrt{3}$

(D) $225\sqrt{3}$

(E) $275\sqrt{3}$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi alterado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi proposta originalmente.)**

Seja $ABCD$ um trapézio isósceles que satisfaz as condições descritas no enunciado e $B\hat{A}D = A\hat{B}C = 2\theta$.

A diagonal AC é bissetriz de $B\hat{A}D = 2\theta$, então $B\hat{A}C = C\hat{A}D = \theta$.

Como $AB \parallel CD$, então $D\hat{C}A = C\hat{A}B = \theta$.

Portanto, $C\hat{A}D = A\hat{C}D = \theta$, o ΔACD é isósceles e $CD = AD = 10\sqrt{3}$.

Os ângulos adjacentes a um mesmo lado não paralelo de um trapézio são suplementares, então

$A\hat{B}C + B\hat{C}D = 180^\circ \Leftrightarrow 2\theta + \left(90^\circ + \theta\right) = 180^\circ \Leftrightarrow \theta = 30^\circ$.

No triângulo retângulo ABC, temos: $\frac{BC}{AB} = \text{sen}\, B\hat{A}C \Leftrightarrow \frac{10\sqrt{3}}{AB} = \text{sen}\, 30^\circ = \frac{1}{2} \Leftrightarrow AB = 20\sqrt{3}$.

No triângulo retângulo BCC', temos: $\frac{CC'}{BC} = \text{sen}\, C\hat{B}C' \Leftrightarrow \frac{CC'}{10\sqrt{3}} = \text{sen}\, 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow CC' = 15$.

Logo, a área do trapézio $ABCD$ é dada por:

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \cdot CC'}{2} = \frac{\left(20\sqrt{3} + 10\sqrt{3}\right) \cdot 15}{2} = 225\sqrt{3} \text{ u.a.}.$$

4) Os números $(35041000)_7$, $(11600)_7$ e $(62350000)_7$ estão na base 7. Esses números terminam, respectivamente, com 3, 2 e 4 zeros. Com quantos zeros terminará o número na base decimal $n = 21^{2012}$, na base 7?

(A) 2012
(B) 2013
(C) 2014
(D) 2015
(E) 2016

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$n = 21^{2012} = (3 \cdot 7)^{2012} = 3^{2012} \cdot 7^{2012}$

Como 7^{2012} é $(1\underbrace{00\ldots0}_{2012\text{ zeros}})_7$, então $n = 21^{2012}$ termina com 2012 zeros na base 7.

5) No retângulo $ABCD$, o lado $BC = 2AB$. O ponto P está sobre o lado AB e $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{4}$. Traça-se a reta $\overleftrightarrow{PS}$ com S no interior de $ABCD$ e $C \in \overleftrightarrow{PS}$. Marcam-se ainda, $M \in AD$ e $N \in BC$ de modo que $MPNS$ seja um losango. O valor de $\frac{BN}{AM}$ é:

(A) $\frac{3}{7}$

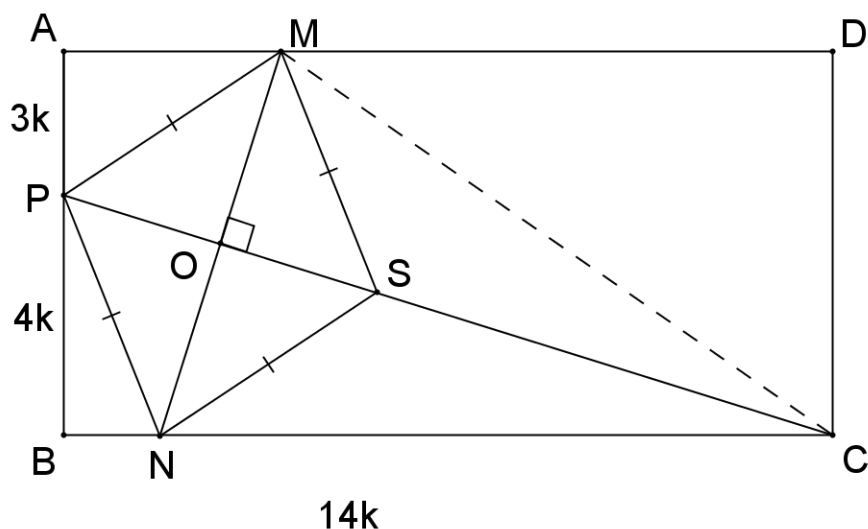
(B) $\frac{3}{11}$

(C) $\frac{5}{7}$

(D) $\frac{5}{11}$

(E) $\frac{7}{11}$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
1ª RESOLUÇÃO:

$$\frac{AP}{PB}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{AP}{3}=\frac{PB}{4}=k\Leftrightarrow AP=3k\ \wedge\ PB=4k$$

$$BC=2\cdot AB=2\cdot(3k+4k)=14k$$

Seja $CN=x$, então, como o $\#MPNS$ é um losango, a reta $\overleftrightarrow{PS}$ é a mediatriz do segmento MN, o que implica $CM=CN=x$.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao ΔCDM, temos:

$$DM^2+DC^2=CM^2\Leftrightarrow DM^2=x^2-(7k)^2=x^2-49k^2\Leftrightarrow DM=\sqrt{x^2-49k^2}.$$

Aplicando o teorema de Pitágoras aos ΔAMP e ΔBNP, temos:

$$MP^2=AP^2+AM^2=(3k)^2+\left(14k-\sqrt{x^2-49k^2}\right)^2=156k^2+x^2-28k\sqrt{x^2-49k^2}$$

$$NP^2=BN^2+BP^2=(14k-x)^2+(4k)^2=(14k-x)^2+16k^2=212k^2-28kx+x^2$$

Como o $\#MPNS$ é um losango, então $MP=NP$, então

$$156k^2+x^2-28k\sqrt{x^2-49k^2}=212k^2-28kx+x^2\Leftrightarrow -2k+x=\sqrt{x^2-49k^2}$$

$$\Leftrightarrow 4k^2-4kx+x^2=x^2-49k^2\Leftrightarrow x=\frac{53k}{4}$$

Portanto,

$$BN=14k-x=14k-\frac{53k}{4}=\frac{3k}{4}$$

e

$$AM=14k-\sqrt{x^2-49k^2}=14k-\sqrt{\left(\frac{53k}{4}\right)^2-49k^2}=14k-\frac{45k}{4}=\frac{11k}{4}$$

Logo, $\frac{BN}{AM}=\frac{\frac{3k}{4}}{\frac{11k}{4}}=\frac{3}{11}$.

2ª RESOLUÇÃO:

$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{AP}{3} = \frac{PB}{4} = k \Leftrightarrow AP = 3k \ \wedge \ PB = 4k$

$BC = 2 \cdot AB = 2 \cdot (3k + 4k) = 14k$

Como o $\#MPNS$ é um losango, a reta $\overleftrightarrow{PS}$ é a mediatriz do segmento MN, o que implica $\Delta CMO \equiv \Delta CNO$ e $M\hat{C}O = N\hat{C}O = \theta$.

Como $AD \parallel BC$, então $C\hat{M}D = M\hat{C}N = 2\theta$.

No triângulo retângulo BCP, temos $\operatorname{tg}\theta = \frac{BP}{BC} = \frac{4k}{14k} = \frac{2}{7}$.

No triângulo retângulo CDM, temos $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{CD}{MD} = \frac{7k}{MD}$.

Utilizando a relação $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{2 \cdot \frac{2}{7}}{1-\left(\frac{2}{7}\right)^2} = \frac{28}{45}$, temos $\frac{7k}{MD} = \frac{28}{45} \Leftrightarrow MD = \frac{45k}{4}$.

Logo, $AM = AD - MD = 14k - \frac{45k}{4} = \frac{11k}{4}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo AMP, temos:

$MP^2 = AM^2 + AP^2 = \left(\frac{11k}{4}\right)^2 + (3k)^2 = \frac{265k^2}{16}$.

Como o $\#MPNS$ é um losango, então $NP = MP$ e, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo BNP, temos:

$BN^2 = NP^2 - BP^2 = \frac{265k^2}{16} - (4k)^2 = \frac{9k^2}{16} \Leftrightarrow BN = \frac{3k}{4}$.

Logo, $\frac{BN}{AM} = \frac{\frac{3k}{4}}{\frac{11k}{4}} = \frac{3}{11}$.

6) O número $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (\ldots) \cdot (k-1) \cdot k$ é formado pelo produto dos k primeiros números naturais não nulos. Qual é o menor valor possível de k para que $\frac{N}{7^{17}}$ seja um número natural, sabendo que k é ímpar e não é múltiplo de 7?

(A) 133
(B) 119
(C) 113
(D) 107
(E) 105

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Para que $\frac{N}{7^{17}}$ seja um número natural, é necessário que $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (\dots) \cdot (k-1) \cdot k = k!$ tenha pelo menos 17 fatores 7.

A quantidade de fatores 7 em $N = k!$ é dada por $\left\lfloor \frac{k}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{7^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{7^3} \right\rfloor + \dots = 17$ (fórmula de Polignac).

$\left\lfloor \frac{k}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{7^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{7^3} \right\rfloor + \dots = 17 \Rightarrow \left\lfloor \frac{k}{7} \right\rfloor \le 17 \Rightarrow \frac{k}{7} < 18 \Leftrightarrow k < 18 \cdot 7 < 7^3$

Como $k < 7^3$, então $\left\lfloor \frac{k}{7^3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{7^4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{7^5} \right\rfloor = \dots = 0$. Portanto,

$\left\lfloor \frac{k}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{7^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{7^3} \right\rfloor + \dots = 17 \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{k}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{7^2} \right\rfloor = 17$.

Se $49 \le k \le 98 \Rightarrow 8 \le \left\lfloor \frac{k}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{7^2} \right\rfloor \le 14 + 2 = 16$. Logo, $k > 98$.

Se $98 < k < 147 \Rightarrow \left\lfloor \frac{k}{7^2} \right\rfloor = 2$, então devemos ter $\left\lfloor \frac{k}{7} \right\rfloor = 15$. O menor valor para o qual isso ocorre é $k = 15 \cdot 7 = 105$, mas como k é ímpar e não é múltiplo de 7, então o menor valor de k é 107.

NOTA 3: Fórmula de Legendre-Polignac:

A **função maior inteiro (ou função piso)** é a função que associa a cada número real x o maior inteiro maior ou igual a x e é denotada por $\lfloor x \rfloor$.

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\}\text{, onde } 0 \le \{x\} < 1 \text{ é a parte fracionária de } x$$

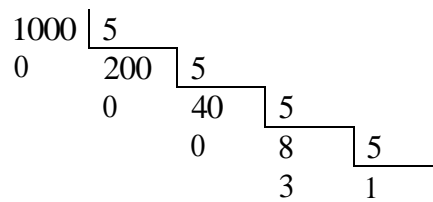
Exemplo: $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor 2,1 \rfloor = 2$, $\lfloor -2,1 \rfloor = -3$

A **fórmula de Legendre-Polignac** estabelece que se p é primo e $n \in \mathbb{Z}_+^*$, então o expoente de p em $n!$ é dado por

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots.$$

Exemplo: Em quantos zeros termina $1000! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 1000$?

Para cada fator 10 de um número, há um zero no final de sua representação decimal. Uma potência de 10 é formada por um fator 2 e um fator 5. Como há mais fatores 2 do que 5, para encontrar a quantidade de fatores 10 em $1000!$, basta contar a quantidade de fatores 5. Isso é feito dividindo-se 1000 sucessivamente por 5 como segue:

$$\begin{array}{lllll} 1000 & \underline{|\,5} & & & \\ 0 & 200 & \underline{|\,5} & & \\ & 0 & 40 & \underline{|\,5} & \\ & & 0 & 8 & \underline{|\,5} \\ & & & 3 & 1 \end{array}$$

Somando-se os quocientes, encontramos a quantidade de fatores 5, ou seja, $200+40+8+1=249$.
Logo, a quantidade de zeros no final da representação de $1000!$ é 249.

Alternativamente, poderíamos utilizar a fórmula de Legendre-Polignac para encontrar a quantidade de fatores 5 em $1000!$. Assim,

$$\left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{5^4} \right\rfloor = 200+40+8+1=249.$$

Note que se $k \geq 5$, temos $\left\lfloor \frac{1000}{5^k} \right\rfloor = 0$.

7) Qual é o menor valor positivo de $2160x+1680y$, sabendo que x e y são números inteiros?
(A) 30
(B) 60
(C) 120
(D) 240
(E) 480

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Se $x, y \in \mathbb{Z}$, então $2160x+1680y = 240 \cdot (9x+7y)$ é sempre múltiplo do $\text{mdc}(2160,1680) = 240$. Portanto, o menor valor positivo de $2160x+1680y = 240 \cdot (9x+7y)$ é $\text{mdc}(2160,1680) = 240$, que ocorre, por exemplo, para $x=-3$ e $y=4$.

8) Um número inteiro possui exatamente 70 divisores. Qual é o menor valor possível para $|N+3172|$?
(A) 2012
(B) 3172
(C) 5184
(D) 22748
(E) 25920

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Inicialmente, devemos observar que, para que tenhamos o menor valor possível de $|N+3172|$, N deve ser negativo.

Seja $N = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ a decomposição canônica do número inteiro N. A quantidade de divisores inteiros (positivos ou negativos) de N é dada por

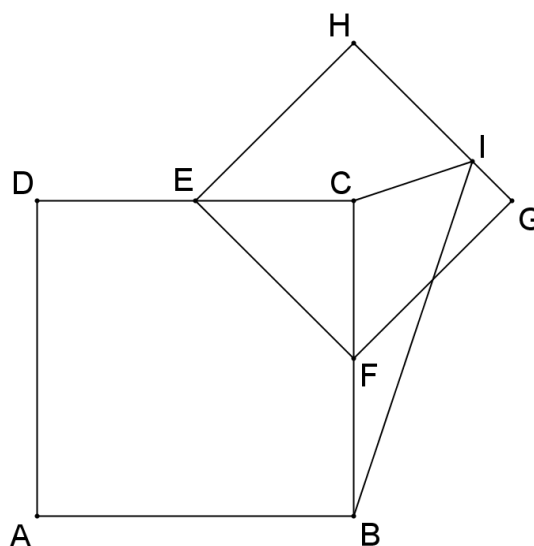
$$d(N) = 2 \cdot (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot (\alpha_3 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1) = 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7 .$$

Assim, temos os seguintes casos:

1° caso: $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 6$ e $\alpha_3 = \cdots = \alpha_k = 0 \Rightarrow N = -p_1^4 \cdot p_2^6 \Rightarrow |N| \geq 3^4 \cdot 2^6 = 5184$

2° caso: $\alpha_1 = 34$ e $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_k = 0 \Rightarrow N = -p_1^{34} \Rightarrow |N| \geq 2^{34} > 2^{13} = 8192$

Portanto, o menor valor possível para $|N+3172|$ ocorre quando $N = -2^6 \cdot 3^4 = -5184$ e é igual a $|N+3172| = |-5184+3172| = 2012$.

9) Observe a figura a seguir.

A figura acima apresenta um quadrado $ABCD$ de lado 2. Sabe-se que E e F são os pontos médios dos lados DC e CB, respectivamente. Além disso, $EFGH$ também forma um quadrado e I está sobre o lado GH, de modo que $GI = \dfrac{GH}{4}$. Qual é a área do triângulo BCI?

(A) $\dfrac{7}{8}$

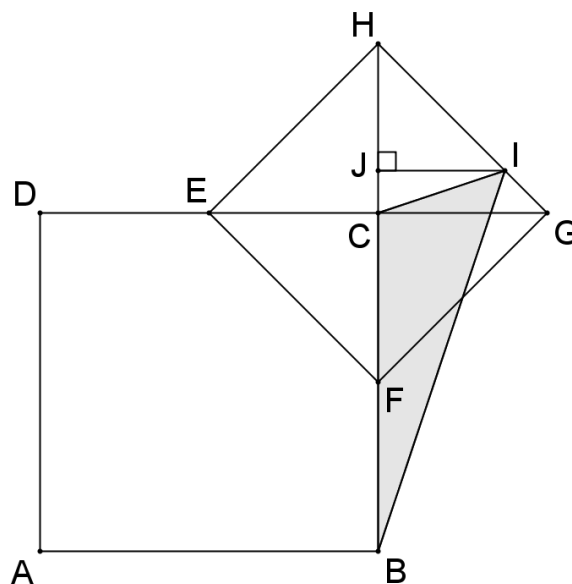
(B) $\dfrac{6}{7}$

(C) $\dfrac{5}{6}$

(D) $\dfrac{4}{5}$

(E) $\dfrac{3}{4}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

Seja $IJ \perp BH \Rightarrow \Delta HIJ \sim \Delta HGC \Rightarrow \frac{JI}{CG} = \frac{HI}{HG} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow JI = \frac{3}{4} CG = \frac{3}{4}$.

Observando que JI é a altura relativa à base BC do ΔBCI, então a área do ΔBCI é dada por:

$$S_{BCI} = \frac{BC \cdot JI}{2} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{4} \text{ u.a.}.$$

10) Determine, no conjunto dos números reais, a soma dos valores de x na igualdade:

$$\left(\frac{1}{1 + \frac{x}{x^2 - 3}} \right) \cdot \left(\frac{2}{x - \frac{3}{x}} \right) = 1.$$

(A) $-\frac{2}{3}$

(B) $-\frac{1}{3}$

(C) 1

(D) 2

(E) $\frac{11}{3}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Condições de existência:
$x \neq 0$
$x^2 - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{3}$
$\frac{x}{x^2-3} \neq -1 \Leftrightarrow x^2 + x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$$\left(\frac{1}{1+\frac{x}{x^2-3}}\right)\cdot\left(\frac{2}{x-\frac{3}{x}}\right)=1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\frac{x^2-3+x}{x^2-3}}\right)\cdot\left(\frac{2}{\frac{x^2-3}{x}}\right)=1 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2-3}{x^2+x-3}\right)\cdot\left(\frac{2x}{x^2-3}\right)=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+x-3}=1 \Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

As raízes encontradas satisfazem às condições de existência. Portanto, $S = \left\{\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}\right\}$ e a soma dos valores de x é $\frac{1+\sqrt{13}}{2} + \frac{1-\sqrt{13}}{2} = 1$.
Observe que a soma das raízes pode ser obtida aplicando-se as relações entre coeficientes e raízes na equação do 2° grau $x^2 - x - 3 = 0$ o que resulta $\frac{-(-1)}{1} = 1$. Entretanto, ainda assim é necessário calcular as raízes a fim de garantir que elas satisfazem as condições de existência.

11) Em dois triângulos, T_1 e T_2, cada base é o dobro da respectiva altura. As alturas desses triângulos, h_1 e h_2, são números ímpares positivos. Qual é o conjunto dos valores possíveis de h_1 e h_2, de modo que a área de $T_1 + T_2$ seja equivalente à área de um quadrado de lado inteiro?
(A) $\varnothing$
(B) unitário
(C) finito
(D) $\{3, 5, 7, 9, 11, \ldots\}$
(E) $\{11, 17, 23, 29, \ldots\}$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
O triângulo T_1 tem altura h_1 e base correspondente $2h_1$. Logo sua área é $S_{T_1} = \frac{2h_1 \cdot h_1}{2} = h_1^2$.
O triângulo T_2 tem altura h_2 e base correspondente $2h_2$. Logo sua área é $S_{T_2} = \frac{2h_2 \cdot h_2}{2} = h_2^2$.
Seja a área de $T_1 + T_2$ seja equivalente à área de um quadrado de lado $k \in \mathbb{Z}$, então
$S_{T_1} + S_{T_2} = k^2 \Leftrightarrow h_1^2 + h_2^2 = k^2$.
Como h_1 e h_2 são números ímpares positivos, podemos supor $h_1 = 2a + 1$ e $h_2 = 2b + 1$, com $a, b \in \mathbb{Z}_+$. Assim, temos: $h_1^2 + h_2^2 = k^2 \Leftrightarrow (2a+1)^2 + (2b+1)^2 = k^2 \Leftrightarrow 4(a^2 + b^2 + a + b) + 2 = k^2$.

Entretanto, os restos dos quadrados perfeitos por 4 são 0 ou 1. Portanto, não existem a e b que satisfaçam a igualdade acima e, consequentemente, o conjunto dos valores de h_1 e h_2 que satisfazem as condições do enunciado é vazio.

12) Qual é o total de números naturais em que o resto é o quadrado do quociente na divisão por 26?
(A) zero.
(B) dois.
(C) seis.
(D) treze.
(E) vinte e cinco.

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Sejam q e $r = q^2$, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de $n \in \mathbb{N}$ por 26, então, pelo algoritmo da divisão de Euclides, temos:
$n = 26 \cdot q + r \Leftrightarrow n = 26 \cdot q + q^2$ e $0 \le r < 26 \Leftrightarrow 0 \le q^2 < 26 \Leftrightarrow q \in \{0,1,2,3,4,5\}$.
$\Rightarrow (q,n) \in \{(0,0);(1,27);(2,56);(3,87);(4,120);(5,155)\}$
Portanto, há seis naturais n que satisfazem as condições do enunciado.

13) Na fabricação de um produto é utilizado o ingrediente A ou B. Sabe-se que, para cada 100 quilogramas (kg) do ingrediente A devem ser utilizados 10 kg do ingrediente B. Se, reunindo x kg do ingrediente A com y kg do ingrediente B, resulta 44000 gramas do produto, então
(A) $y^x = 2^{60}$
(B) $\sqrt{x \cdot y} = 5\sqrt{10}$
(C) $\sqrt[10]{y^x} = 256$
(D) $\sqrt[4]{x^y} = 20$
(E) $\sqrt{\frac{y}{x}} = 2\sqrt{5}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi alterado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi proposta originalmente.)**

Como $44000\text{ g} = 44\text{kg}$, então $x + y = 44$.
Se, para cada 100 kg do ingrediente A devem ser utilizados 10 kg do ingrediente B, então a quantidade de A é sempre dez vezes a quantidade de B, ou seja, $x = 10y$.
$\Rightarrow 10y + y = 44 \Leftrightarrow y = 4 \wedge x = 40$.
Logo, $\sqrt[10]{y^x} = \sqrt[10]{4^{40}} = 4^4 = 2^8 = 256$.

14) Seja $P(x)=2x^{2012}+2012x+2013$. O resto $r(x)$ da divisão de $P(x)$ por $d(x)=x^4+1$ é tal que $r(-1)$ é:
(A) -2
(B) -1
(C) 0
(D) 1
(E) 2

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Considerando a fatoração $x^n+1=(x+1)\left(x^{n-1}-x^{n-2}+\ldots+x^2-x+1\right)$ para n ímpar, temos:
$x^{2012}+1=\left(x^4\right)^{503}+1=\left(x^4+1\right)\left[\left(x^4\right)^{502}-\left(x^4\right)^{501}+\ldots+\left(x^4\right)^2-\left(x^4\right)+1\right]$
$\Leftrightarrow 2x^{2012}=2\left(x^4+1\right)\left[\left(x^4\right)^{502}-\left(x^4\right)^{501}+\ldots+\left(x^4\right)^2-\left(x^4\right)+1\right]-2$.
Substituindo a expressão acima em $P(x)$, temos:
$P(x)=2x^{2012}+2012x+2013=2\left(x^4+1\right)\left[\left(x^4\right)^{502}-\left(x^4\right)^{501}+\ldots+\left(x^4\right)^2-\left(x^4\right)+1\right]-2+2012x+2013=$
$=2\left(x^4+1\right)\left[\left(x^4\right)^{502}-\left(x^4\right)^{501}+\ldots+\left(x^4\right)^2-\left(x^4\right)+1\right]+2012x+2011$
Portanto, $r(x)=2012x+2011$ e $r(-1)=2012\cdot(-1)+2011=-1$.

15) Uma divisão de números naturais está representada a seguir.

D | d
r | q

$D=2012$ é o dividendo, d é o divisor, q é o quociente e r é o resto. Sabe-se que $0\neq d=21$ ou $q=21$. Um resultado possível para $r+d$ ou $r+q$ é:
(A) 92
(B) 122
(C) 152
(D) 182
(E) 202

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Pelo algoritmo da divisão de Euclides, temos: $D = d \cdot q + r \Leftrightarrow 2012 = d \cdot q + r$, com $0 \le r < d$.
Se $d = 21$, temos: $2012 = 21 \cdot 95 + 17 \Leftrightarrow q = 95 \ \wedge \ r = 17 \Rightarrow r + d = 21 + 17 = 38$ e $r + q = 95 + 17 = 112$
.
Se $q = 21$, temos: $2012 = d \cdot 21 + r$. Como $0 \le r < d$, então

$$21d \le 2012 < 21d + d = 22d \Leftrightarrow 21 \le \frac{2012}{d} < 22 \Leftrightarrow \frac{2012}{22} < d \le \frac{2012}{21} \Leftrightarrow 92 \le d \le 95.$$

Assim, com $q = 21$, temos os seguintes casos:
$d = 92 \Rightarrow r = 80 \Rightarrow r + d = 172 \ \wedge \ r + q = 101$
$d = 93 \Rightarrow r = 59 \Rightarrow r + d = 152 \ \wedge \ r + q = 80$
$d = 94 \Rightarrow r = 38 \Rightarrow r + d = 132 \ \wedge \ r + q = 59$
$d = 95 \Rightarrow r = 17 \Rightarrow r + d = 112 \ \wedge \ r + q = 38$
Dentre as opções apenas 152 é um valor possível para $r + d$ ou $r + q$.

16) Seja $a^3b - 3a^2 - 12b^2 + 4ab^3 = 287$. Considere que a e b são números naturais e que $ab > 3$. Qual é o maior valor natural possível para a expressão $a + b$?
(A) 7
(B) 11
(C) 13
(D) 17
(E) 19

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$$a^3b - 3a^2 - 12b^2 + 4ab^3 = 287 \Leftrightarrow ab\left(a^2 + 4b^2\right) - 3\left(a^2 + 4b^2\right) = 7 \cdot 41 \Leftrightarrow (ab - 3)\left(a^2 + 4b^2\right) = 7 \cdot 41$$

Pela desigualdade das médias, temos $\dfrac{a^2 + 4b^2}{2} \ge \sqrt{a^2 \cdot 4b^2} = 2ab > 6 \Leftrightarrow a^2 + 4b \ \ > 12$.
Como os dois fatores são números naturais positivos, temos os seguintes casos possíveis:
1° caso:

$$\begin{cases} ab - 3 = 1 \\ a^2 + 4b^2 = 287 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 4 \\ a^2 + 4b^2 = 287 \end{cases}$$

$$b = \frac{4}{a} \Rightarrow a^2 + 4 \cdot \left(\frac{4}{a}\right)^2 = 287 \Leftrightarrow a^4 - 287a^2 + 64 = 0 \Leftrightarrow a^2 = \frac{287 \pm \sqrt{82113}}{2} \notin \mathbb{N}$$

2° caso:

$$\begin{cases} ab - 3 = 7 \\ a^2 + 4b^2 = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 10 \\ a^2 + 4b^2 = 41 \end{cases}$$

$$b = \frac{10}{a} \Rightarrow a^2 + 4 \cdot \left(\frac{10}{a}\right)^2 = 41 \Leftrightarrow a^4 - 41a^2 + 400 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 25 \ \vee \ a^2 = 16 \Leftrightarrow a = \pm 5 \ \vee \ a = \pm 4$$

Como $a, b \in \mathbb{N}$, então temos:
$a = 5 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a + b = 7$

$a = 4 \Rightarrow b = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \notin \mathbb{N}$

Portanto, o único valor possível de $a + b$ é 7.

17) Sabendo que $A = \frac{3+\sqrt{6}}{5\sqrt{3} - 2\sqrt{12} - \sqrt{32} + \sqrt{50}}$, qual é o valor de $\frac{A^2}{\sqrt[6]{A^7}}$?

(A) $\sqrt[5]{3^4}$
(B) $\sqrt[7]{3^6}$
(C) $\sqrt[8]{3^5}$
(D) $\sqrt[10]{3^7}$
(E) $\sqrt[12]{3^5}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$$A = \frac{3+\sqrt{6}}{5\sqrt{3} - 2\sqrt{12} - \sqrt{32} + \sqrt{50}} = \frac{3+\sqrt{6}}{5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$

$$\frac{A^2}{\sqrt[6]{A^7}} = \frac{A^2}{A^{7/6}} = A^{2-\frac{7}{6}} = A^{5/6} = \left(3^{1/2}\right)^{5/6} = 3^{5/12} = \sqrt[12]{3^5}$$

18) Somando todos os algarismos até a posição 2012 da parte decimal da fração irredutível $\frac{5}{7}$ e, em seguida, dividindo essa soma por 23, qual será o resto dessa divisão?

(A) 11
(B) 12
(C) 14
(D) 15
(E) 17

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
A fração $\frac{5}{7}$ é uma dízima periódica. Vamos efetuar a divisão para identificar o período.

$$\begin{array}{l|l} 50 & 7 \\ \hline \;\;10 & 0,714285\ldots \\ \;\;\;\;30 & \\ \;\;\;\;\;\;20 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;60 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;40 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;5 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\ddots & \end{array}$$

Quando o resto 5 se repete os números na parte decimal também se repetirão, portanto $\frac{5}{7} = 0,\overline{714285}$.

O período da dízima periódica é 714285, que possui 6 algarismos e cuja soma é $7+1+4+2+8+5=27$.
Assim, somando os algarismos da parte decimal até a posição $2012 = 6 \cdot 335 + 2$, somaremos 335 períodos completos e mais os algarismos 7 e 1.
Portanto, a soma encontrada é $335 \cdot 27 + 7 + 1 = 9053$ que dividida por 23 deixa resto 14.

19) Sabendo que n é natural não nulo, e que $x \# y = x^y$, qual é o valor de $(-1)^{n^4+n+1} + \left(\frac{2\#(2\#(2\#2))}{((2\#2)\#2)\#2} \right)$?

(A) 127
(B) 128
(C) 255
(D) 256
(E) 511

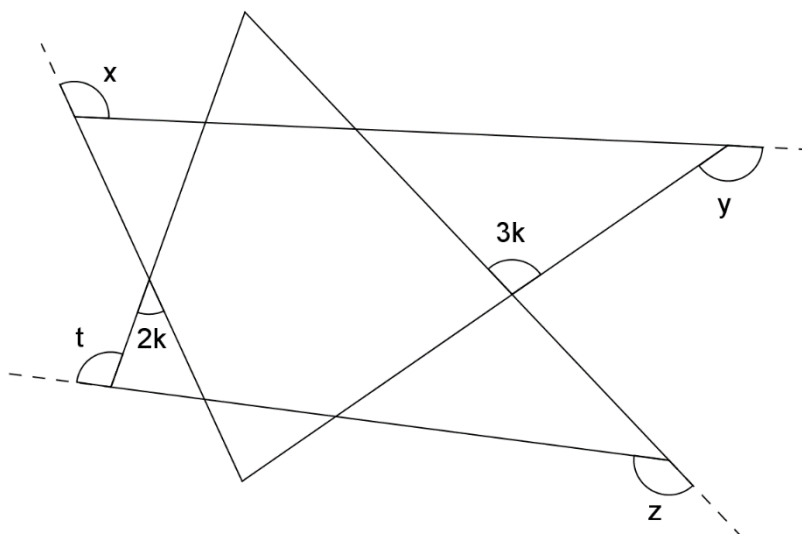
RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
$2\#(2\#(2\#2)) = 2\#\left(2\#\left(2^2\right)\right) = 2\#(2\#4) = 2\#\left(2^4\right) = 2\#16 = 2^{16}$

$((2\#2)\#2)\#2 = \left(\left(2^2\right)\#2\right)\#2 = (4\#2)\#2 = \left(4^2\right)\#2 = 16\#2 = 16^2 = \left(2^4\right)^2 = 2^8$

$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^4 + n + 1 = n\left(n^3+1\right)+1$ é ímpar, pois n e $\left(n^3+1\right)$ têm paridades contrárias, ou seja, pelo menos um deles é par $\Rightarrow (-1)^{n^4+n+1} = -1$.

$$\Rightarrow (-1)^{n^4+n+1} + \left(\frac{2\#(2\#(2\#2))}{((2\#2)\#2)\#2} \right) = -1 + \left(\frac{2^{16}}{2^8} \right) = -1 + 2^8 = 255$$

20) Observe a figura a seguir.

Na figura acima, sabe-se que $k > 36^\circ$. Qual é o menor valor natural da soma $x+y+z+t$, sabendo que tal soma deixa resto 4, quando dividida por 5, e resto 11, quando dividida por 12?

(A) 479°

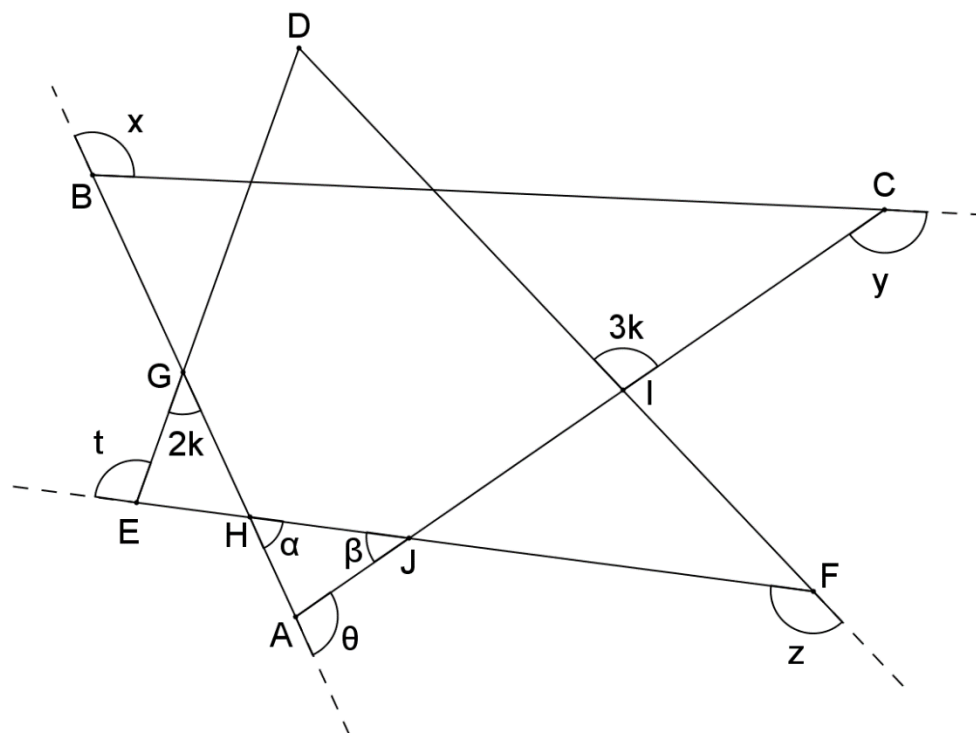
(B) 539°

(C) 599°

(D) 659°

(E) 719°

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

Vamos utilizar que, em um triângulo qualquer, o ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele e que a soma dos ângulos externos é igual a 360°.

$\Delta EGH: t = 2k + \alpha \Leftrightarrow \alpha = t - 2k$

$\Delta FIJ: z = 3k + \beta \Leftrightarrow \beta = z - 3k$

$\Delta AJH: \theta = \alpha + \beta$

$\Delta ABC: x + y + \theta = 360^\circ$

$x + y + \theta = 360^\circ \Rightarrow x + y + (\alpha + \beta) = 360^\circ \Rightarrow x + y + (t - 2k) + (z - 3k) = 360^\circ$

$\Leftrightarrow x + y + z + t = 360^\circ + 5k > 360^\circ + 5 \cdot 36^\circ = 540^\circ$

A soma $x + y + z + t > 540^\circ$ deixa resto 4, quando dividida por 5, e resto 11, quando dividida por 12, então $(x + y + z + t) + 1$ é múltiplo de 5 e de 12, e, portanto, múltiplo de 60.

O menor múltiplo de 60 maior do que 541 é 600, então

$(x + y + z + t) + 1 = 600 \Leftrightarrow x + y + z + t = 599^\circ$.

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2011/2012

1) É correto afirmar que o número $5^{2011}+2\cdot 11^{2011}$ é múltiplo de
(A) 13
(B) 11
(C) 7
(D) 5
(E) 3

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Como $5\equiv -1\pmod 3$ e $11\equiv -1\pmod 3$, vamos calcular inicialmente o resto na divisão por 3:

$$5^{2011}+2\cdot 11^{2011}\equiv(-1)^{2011}+2\cdot(-1)^{2011}\equiv -1-2\equiv 0\pmod 3$$

Logo, $5^{2011}+2\cdot 11^{2011}$ é múltiplo de 3.
Observe ainda que:

$$5^{2011}+2\cdot 11^{2011}\equiv 5^{2011}+2\cdot(-2)^{2011}\equiv 5^{2011}-2^{2011}\equiv 5\cdot\left(5^2\right)^{1005}-2\cdot\left(2^6\right)^{335}\equiv$$

$$\equiv 5\cdot(-1)^{1005}-2\cdot(-1)^{335}\equiv -5+2\equiv -3\equiv 10\pmod{13}$$

$$5^{2011}+2\cdot 11^{2011}\equiv 5^{2011}+2\cdot 0^{2011}\equiv 5\cdot\left(5^5\right)^{402}\equiv 5\cdot 1^{402}\equiv 5\pmod{11}$$

$$5^{2011}+2\cdot 11^{2011}\equiv(-2)^{2011}+2\cdot 4^{2011}\equiv -2^{2011}+2^{4023}\equiv -2\cdot\left(2^3\right)^{670}+\left(2^3\right)^{1341}\equiv$$

$$\equiv -2\cdot 1^{670}+1^{1341}\equiv -2+1\equiv -1\equiv 6\pmod 7$$

$$5^{2011}+2\cdot 11^{2011}\equiv 0^{2011}+2\cdot 1^{2011}\equiv 2\pmod 5$$

Logo, $5^{2011}+2\cdot 11^{2011}$ não é múltiplo de 13, 11, 7 ou 5.

2) A solução real da equação $\frac{7}{x-1}-\frac{8}{x+1}=\frac{9}{x^2-1}$ é um divisor de
(A) 12
(B) 14
(C) 15
(D) 16
(E) 19

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Condição de existência: $x\neq\pm 1$

$$\frac{7}{x-1}-\frac{8}{x+1}=\frac{9}{x^2-1}\Leftrightarrow 7(x+1)-8(x-1)=9\Leftrightarrow x=6$$

Logo, a solução real da equação é 6 que é um divisor de 12.

3) A soma das raízes de uma equação do 2° grau é $\sqrt{2}$ e o produto dessas raízes é $0,25$. Determine o valor de $\frac{a^3-b^3-2ab^2}{a^2-b^2}$, sabendo que 'a' e 'b' são as raízes dessa equação do 2° grau e $a>b$, e assinale a opção correta.

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$

(C) -1

(D) $\sqrt{2}+\frac{1}{4}$

(E) $\sqrt{2}-\frac{1}{4}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$a+b=\sqrt{2}$

$a\cdot b=0,25=\frac{1}{4}$

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=(a+b)^2-4ab=\left(\sqrt{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{4}=1$

$a>b\Rightarrow a-b=1$

$$\frac{a^3-b^3-2ab^2}{a^2-b^2}=\frac{a^3-ab^2-b^3-ab^2}{a^2-b^2}=\frac{a\left(a^2-b^2\right)-b^2(a+b)}{a^2-b^2}=\frac{(a+b)\left(a^2-ab-b^2\right)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a^2-ab-b^2}{a-b}$$

$$=\frac{(a+b)(a-b)-ab}{a-b}=a+b-\frac{ab}{a-b}=\sqrt{2}-\frac{\frac{1}{4}}{1}=\sqrt{2}-\frac{1}{4}$$

4) Sejam 'a', 'b' e 'c' números reais não nulos tais que $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=p$, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=q$ e $ab+ac+bc=r$. O valor de q^2+6q é sempre igual a

(A) $\frac{p^2r^2+9}{4}$

(B) $\frac{p^2r^2-9p}{12}$

(C) p^2r^2-9

(D) $\frac{p^2r^2-10}{4r}$

(E) $p^2r^2 - 12p$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$pr = \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right)(ab + ac + bc) = 1 + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{a}{b} + 1 + \frac{b}{c} + 1 + \frac{b}{a} = 3 + q$$

$$\Rightarrow p^2r^2 = (q+3)^2 \Leftrightarrow p^2r^2 = q^2 + 6q + 9 \Leftrightarrow q^2 + 6q = p^2r^2 - 9$$

5) A quantidade de soluções reais e distintas da equação $3x^3 - \sqrt{33x^3 + 97} = 5$ é

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 5
(E) 6

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$$3x^3 - \sqrt{33x^3 + 97} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{33x^3 + 97} = 3x^3 - 5$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{33x^3 + 97}\right)^2 = \left(3x^3 - 5\right)^2 \ \wedge \ 3x^3 - 5 \geq 0$$

A condição $3x^3 - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \geq \frac{5}{3}$ será verificada no final.

$$\Leftrightarrow 33x^3 + 97 = 9x^6 - 30x^3 + 25 \Leftrightarrow x^6 - 7x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -1 \ \vee \ x^3 = 8$$

Como $x^3 \geq \frac{5}{3}$, então $x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$.

Logo, há apenas uma solução real.

6) Num paralelogramo $ABCD$ de altura $CP = 3$, a razão $\frac{AB}{BC} = 2$. Seja $'M'$ o ponto médio de AB e $'P'$ o pé da altura de $ABCD$ baixada sobre o prolongamento de AB, a partir de C. Sabe-se que a razão entre as áreas dos triângulos MPC e ADM é $\frac{S(MPC)}{S(ADM)} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$. A área do triângulo BPC é igual a

(A) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

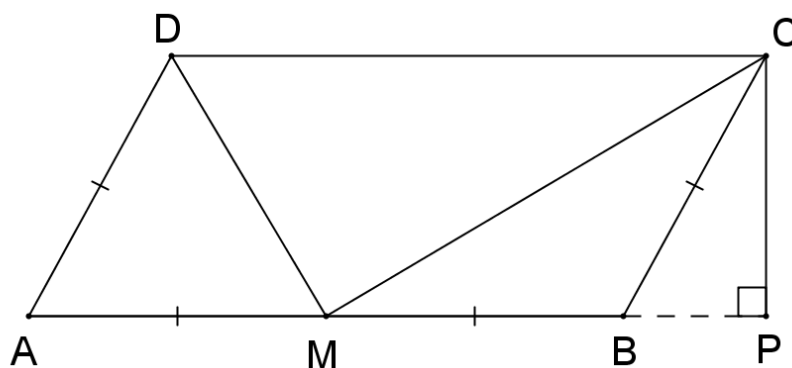
(B) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

(D) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$\frac{AB}{BC} = 2 \Leftrightarrow BC = \frac{AB}{2} = AM = MB$

Como os triângulos MPC e ADM possuem alturas de mesma medida, a razão entre as suas áreas é igual à razão entre as suas bases.

$\frac{S(MPC)}{S(ADM)} = \frac{MP}{AM} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{MB+BP}{AM} = 1+\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 1+\frac{BP}{BC} = 1+\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{BP}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{BP}{\sqrt{3}} = \frac{BC}{2} = k$

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\Delta BPC : BP^2 + CP^2 = BC^2 \Leftrightarrow (\sqrt{3}k)^2 + 3^2 = (2k)^2 \Leftrightarrow k = 3$

$\Rightarrow S(BPC) = \frac{BP \cdot PC}{2} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 3}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ unidades de área

7) O valor de $\sqrt{9^{0,5} \times 0,333\ldots + \sqrt[7]{4 \times \sqrt{0,0625}}} - \frac{(3,444\ldots + 4,555\ldots)}{\sqrt[3]{64}}$ é

(A) 0

(B) $\sqrt{2}$

(C) $\sqrt{3}-2$

(D) $\sqrt{2}-2$

(E) 1

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$$\sqrt{9^{0,5}\times 0,333\ldots+\sqrt[7]{4\times\sqrt{0,0625}}}-\frac{(3,444\ldots+4,555\ldots)}{\sqrt[3]{64}}=\sqrt{3\times\frac{1}{3}+\sqrt[7]{4\times\sqrt{\frac{625}{10000}}}}-\frac{7,999\ldots}{\sqrt[3]{2^6}}=$$

$$=\sqrt{1+\sqrt[7]{4\times\frac{25}{100}}}-\frac{8}{2^2}=\sqrt{1+\sqrt[7]{4\times\frac{1}{4}}}-2=\sqrt{1+\sqrt[7]{1}}-2=\sqrt{2}-2$$

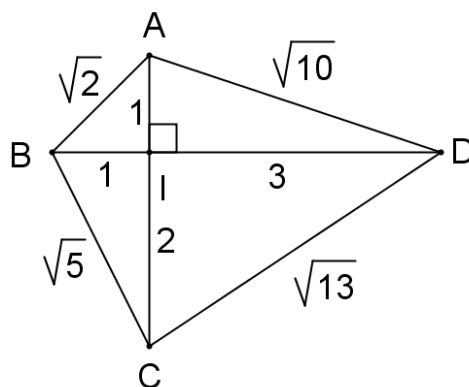
8) Dado um quadrilátero convexo em que as diagonais são perpendiculares, analise as afirmações abaixo.

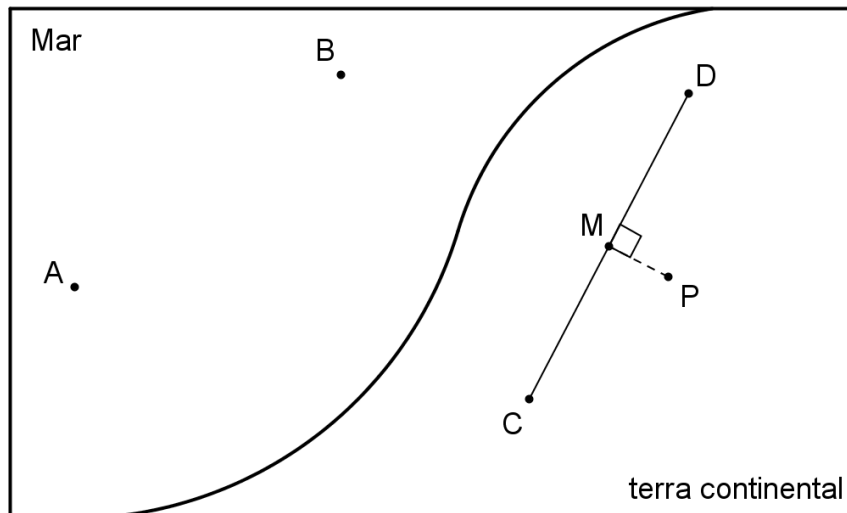
I – Um quadrilátero assim formado sempre será um quadrado.
II – Um quadrilátero assim formado sempre será um losango.
III – Pelo menos uma das diagonais de um quadrilátero assim formado divide esse quadrilátero em dois triângulos isósceles.

Assinale a opção correta.
(A) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(B) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
(C) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
(D) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
(E) Todas as afirmativas são falsas.

RESPOSTA: E

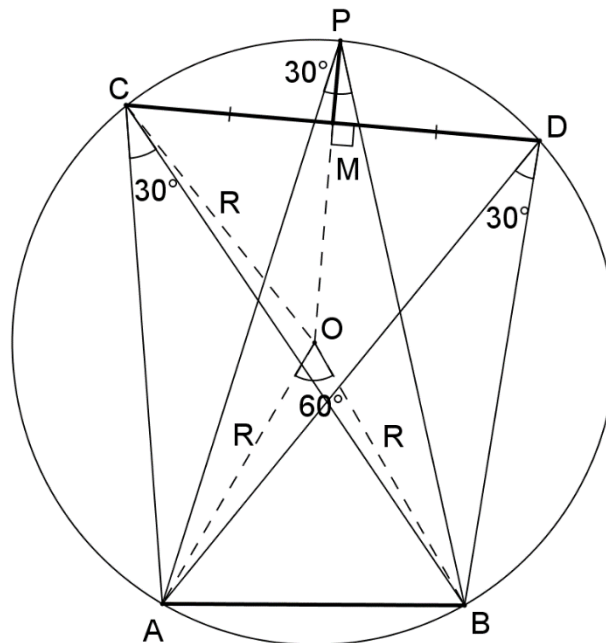
RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi alterado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi proposta originalmente.)**

I – FALSA
Se as diagonais têm medidas diferentes ou não se cortam ao meio, o quadrilátero não será um quadrado.
II – FALSA
Se as diagonais não se cortam ao meio, o quadrilátero não será um losango.
III – FALSA
Basta observar o contra exemplo a seguir.

Esse contraexemplo também mostra que as afirmativas I e II são FALSAS.

9) Observe a figura a seguir

A figura acima mostra, num mesmo plano, duas ilhas representadas pelos pontos $'A'$ e $'B'$ e os pontos $'C'$, $'D'$, $'M'$ e $'P'$ fixados no continente por um observador. Sabe-se que $A\hat{C}B = A\hat{D}B = A\hat{P}B = 30^\circ$, $'M'$ é o ponto médio de $CD = 100\text{ m}$ e que $PM = 10\text{ m}$ é perpendicular a CD. Nessas condições, a distância entre as ilhas é de:

(A) 150 m
(B) 130 m
(C) 120 m
(D) 80 m
(E) 60 m

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi alterado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi proposta originalmente.)**

Como $A\hat{C}B = A\hat{D}B = A\hat{P}B = 30^\circ$, então C, D e P pertencem ao arco capaz de 30° sobre $\overline{AB}$.
Como M é ponto médio de $\overline{CD}$ e $\overline{PM} \perp \overline{CD}$, então $\overline{PM}$ é uma flecha da circunferência e seu prolongamento passa pelo centro O.
Seja R o raio da circunferência que contém o arco capaz, então, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OCM, temos:
$(R-10)^2 + 50^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 - 20R + 100 + 2500 = R^2 \Leftrightarrow R = 130$.
Como o ΔOAB é equilátero, então $\overline{AB} = R = 130 \text{ m}$.

10) Numa pesquisa sobre a leitura dos jornais A e B, constatou-se que 70% dos entrevistados leem o jornal A e 65% leem o jornal B. Qual o percentual máximo dos que leem os jornais A e B?
(A) 35%
(B) 50%
(C) 65%
(D) 80%
(E) 95%

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi alterado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi proposta originalmente.)**

Seja $n(X)$ o percentual de leitores associados ao conjunto X.
$n(A) = 70\%$

$n(B) = 65\%$
O percentual máximo dos que leem os jornais A e B é o valor máximo de $n(A \cap B)$.
Pelo princípio da inclusão-exclusão: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$\Leftrightarrow n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 70\% + 65\% - n(A \cup B) = 135\% - n(A \cup B)$
Como $n(A \cup B) \geq n(A) = 70\%$, então $n(A \cap B)_{MAX} = 135\% - 70\% = 65\%$.
Note que esse valor máximo ocorre quando $B \subset A$, o que implica $n(A \cap B) = n(B)$.

11) Analise as afirmações abaixo referentes a números reais simbolizados por 'a', 'b' ou 'c'.
I – A condição $a \cdot b \cdot c > 0$ garante que 'a', 'b' e 'c' não são, simultaneamente, iguais a zero, bem como a condição $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.
II – Quando o valor absoluto de 'a' é menor do que $b > 0$, é verdade que $-b < a < b$.
III – Admitindo que $b > c$, é verdadeiro afirmar que $b^2 > c^2$.
Assinale a opção correta.
(A) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(B) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
(C) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
(D) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
(E) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
I – VERDADEIRA
$a \cdot b \cdot c > 0 \Rightarrow a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0 \wedge b^2 > 0 \wedge c^2 > 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$
Note que a condição inicial garante que nenhum dos três números é nulo, que é uma condição mais forte do que os três números não serem simultaneamente nulos.
II – VERDADEIRA
Pela definição de valor absoluto (módulo), temos se $b > 0$, então $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$.
Isso pode ser demonstrado da seguinte maneira:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ se } a \geq 0 \\ -a, \text{ se } a < 0 \end{cases}$$

Se $a \geq 0$, então $|a| < b \Leftrightarrow a < b$. Logo, $0 \leq a < b$.
Se $a < 0$, então $|a| < b \Leftrightarrow -a < b \Leftrightarrow -b < a$. Logo, $-b < a < 0$.
Fazendo a união dos dois intervalos temos o conjunto solução da inequação $|a| < b$ que é $-b < a < b$.
III - FALSA
Basta considerar o contra exemplo seguinte: $-1 > -2$ e $(-1)^2 = 1 < 2 = (-2)^2$.
A condição $b > c > 0 \Rightarrow b^2 > c^2$ seria verdadeira.

12) Observe a figura abaixo.

A figura apresentada foi construída por etapas. A cada etapa, acrescentam-se pontos na horizontal e na vertical, com uma unidade de distância, exceto na etapa 1, iniciada com 1 ponto.
Continuando a compor a figura com estas etapas e buscando um padrão, é correto concluir que
(A) cada etapa possui quantidade ímpar de pontos e a soma desses $'n'$ primeiros ímpares é n^2.
(B) a soma de todos os números naturais começando do 1 até $'n'$ é sempre um quadrado perfeito.
(C) a soma dos pontos das $'n'$ primeiras etapas é $2n^2-1$.
(D) cada etapa $'n'$ tem $3n-2$ pontos.
(E) cada etapa $'n'$ tem $2n+1$ pontos.

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Na n-ésima etapa são acrescentados n pontos na horizontal e n pontos na vertical, mas o ponto da "quina" foi contado na horizontal e na vertical, logo o total de pontos acrescentados na n-ésima etapa é $n+n-1=2n-1$.
Assim, a quantidade de pontos acrescentados a cada etapa é ímpar.
A soma das quantidades de pontos das n primeiras etapas é:
$S'_n = 1+3+5+\cdots+(2n-1)$
$\Rightarrow 2\cdot S'_n = (1+(2n-1))+(3+(2n-3))+\cdots+((2n-3)+3)+((2n-1)+1) = n\cdot 2n \Leftrightarrow S'_n = n^2$
A soma de todos os naturais de 1 até n é
$S_n = 1+2+3+\cdots+n \Leftrightarrow 2S_n = (1+n)+(2+(n-1))+\cdots+((n-1)+2)+(n+1) = n\cdot(n+1) \Leftrightarrow S_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$
Note que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ não é um quadrado perfeito.
Logo, a única alternativa correta é a letra (A).

13) O número real $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$ é igual a
(A) $5-\sqrt{3}$
(B) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$
(C) $3-\sqrt{2}$
(D) $\sqrt{13-3\sqrt{3}}$

(E) 2

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Para resolver esse problema deve-se observar o produto notável $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
Considerando a expressão
$(a-b\sqrt{3})^3 = a^3 - 3a^2b\sqrt{3} + 3a(b\sqrt{3})^2 - (b\sqrt{3})^3 = (a^3 + 9ab^2) - 3(a^2b + b^3)\sqrt{3}$.
Vamos então tentar identificar números positivos a e b tais que
$26 - 15\sqrt{3} = (a^3 + 9ab^2) - 3(a^2b + b^3)\sqrt{3}$.

$26 = 8 + 18 = 2^3 + 9 \cdot 2 \cdot 1^2 \ \wedge \ 15 = 3(2^2 \cdot 1 + 1^3) \Rightarrow a = 2 \ \wedge \ b = 1 \Rightarrow 26 - 15\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^3$.
Note que para identificar o valor de a testamos os cubos perfeitos menores que 26.

$$\Rightarrow \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^3} = 2-\sqrt{3}$$

$$(2-\sqrt{3})^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3} \Rightarrow 2 - \sqrt{3} = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3} = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

14) A divisão do inteiro positivo $'N'$ por 5 tem quociente $'q_1'$ e resto 1. A divisão de $'4q_1'$ por 5 tem quociente $'q_2'$ e resto 1. A divisão de $'4q_2'$ por 5 tem quociente $'q_3'$ e resto 1. Finalmente, dividindo $'4q_3'$ por 5, o quociente é $'q_4'$ e o reto é 1. Sabendo que $'N'$ pertence ao intervalo aberto $(621,1871)$, a soma dos algarismos de $'N'$ é
(A) 18
(B) 16
(C) 15
(D) 13
(E) 12

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Escrevendo cada uma das divisões com base no algoritmo de Euclides e somando 4 unidades a cada uma das equações, temos:

$$N = 5 \cdot q_1 + 1 \Rightarrow N + 4 = 5(q_1 + 1)$$

$$4q_1 = 5 \cdot q_2 + 1 \Rightarrow 4(q_1 + 1) = 5(q_2 + 1)$$

$$4q_2 = 5 \cdot q_3 + 1 \Rightarrow 4(q_2 + 1) = 5(q_3 + 1)$$

$$4q_3 = 5 \cdot q_4 + 1 \Rightarrow 4(q_3 + 1) = 5(q_4 + 1)$$

Multiplicando as quatro equações obtidas, temos: $4^3(N+4) = 5^4(q_4+1)$.

$\text{mdc}(4,5) = 1 \Rightarrow 5^4 \mid (N+4) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $N + 4 = 5^4 \cdot k \Leftrightarrow N = 625k - 4$

$N \in (621,1871) \Rightarrow 621 < N < 1871 \Rightarrow 621 < 625k - 4 < 1871 \Rightarrow k = 2$

$\Rightarrow N = 625 \cdot 2 - 4 = 1246$
Logo, a soma dos algarismos de N é $1+2+4+6=13$.

15) Assinale a opção que apresenta o único número que NÃO é inteiro.
(A) $\sqrt[6]{1771561}$
(B) $\sqrt[4]{28561}$
(C) $\sqrt[6]{4826807}$
(D) $\sqrt[4]{331776}$
(E) $\sqrt[6]{148035889}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Vamos analisar o último algarismo dos quadrados perfeitos e dos cubos perfeitos.
As congruências abaixo são calculadas módulo 10.
$0^2 \equiv 0$; $1^2 \equiv 1$; $2^2 \equiv 4$; $3^2 \equiv 9$; $4^2 \equiv 6$; $5^2 \equiv 5$; $6^2 \equiv 6$; $7^2 \equiv 9$; $8^2 \equiv 4$; $9^2 \equiv 1$
$0^3 \equiv 0$; $1^3 \equiv 1$; $2^3 \equiv 8$; $3^3 \equiv 7$; $4^3 \equiv 4$; $5^3 \equiv 5$; $6^3 \equiv 6$; $7^3 \equiv 3$; $8^3 \equiv 2$; $9^3 \equiv 9$
Assim, o número 4826807 não é quadrado e não é cubo perfeito, logo $\sqrt[6]{4826807} \notin \mathbb{Z}$.
Note que $\sqrt[6]{1771561} = \sqrt[6]{11^6} = 11$, $\sqrt[4]{28561} = \sqrt[4]{13^4} = 13$, $\sqrt[4]{331776} = \sqrt[4]{24^4} = 24$ e $\sqrt[6]{148035889} = \sqrt[6]{23^6} = 23$ são todos inteiros.

16) A expressão $\sqrt[3]{-(x-1)^6}$ é um número real. Dentre os números reais que essa expressão pode assumir, o maior deles é:
(A) 2
(B) $\sqrt{2}-1$
(C) $2-\sqrt{2}$
(D) 1
(E) 0

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
$\sqrt[3]{-(x-1)^6} = -(x-1)^2$
$(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow -(x-1)^2 \leq 0$.
Logo, o valor máximo de $\sqrt[3]{-(x-1)^6} = -(x-1)^2$ é 0 que ocorre quando $x=1$.
Essa conclusão poderia ser obtida também observando que o valor máximo da expressão é a ordenada do vértice da função quadrática $y = -(x-1)^2$ cujo vértice é $V = (1,0)$.

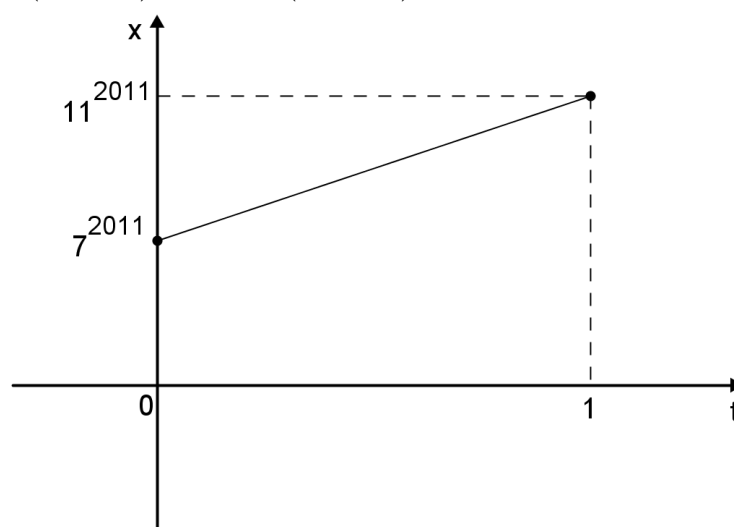
17) Sejam $A = [7^{2011}, 11^{2011}]$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x = (1-t) \cdot 7^{2011} + t \cdot 11^{2011} \text{ com } t \in [0,1]\}$, o conjunto $A - B$ é

(A) $A \cap B$
(B) $B - \{11^{2011}\}$
(C) $A - \{7^{2011}\}$
(D) A
(E) $\varnothing$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
A expressão $x = (1-t) \cdot 7^{2011} + t \cdot 11^{2011}$ é uma função do primeiro grau em t que associa cada valor de t a um valor de x.

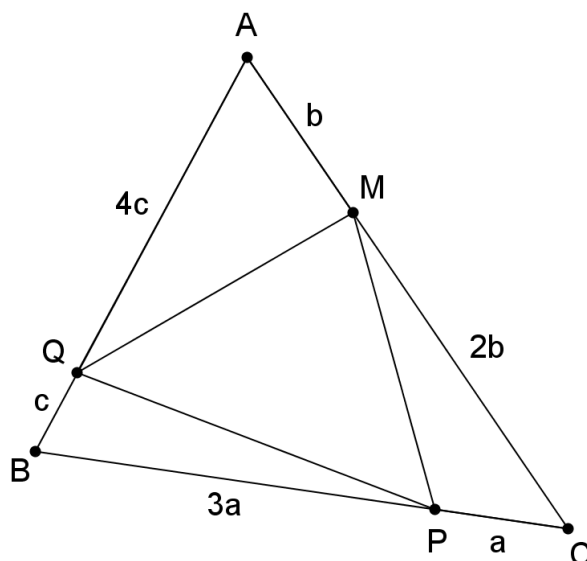
$$x = (1-t) \cdot 7^{2011} + t \cdot 11^{2011} = (11^{2011} - 7^{2011})t + 7^{2011}$$

Como essa função do primeiro grau possui domínio $[0,1]$, sua imagem é $[7^{2011}, 11^{2011}]$, logo $B = [7^{2011}, 11^{2011}]$ e $A - B = \varnothing$.
Abaixo está apresentado o gráfico que representa essa função. Observe que esse gráfico é um segmento de reta que liga o ponto $(0, 7^{2011})$ ao ponto $(1, 11^{2011})$.

Note ainda que a expressão utilizada no enunciado é uma expressão conhecida para representação dos elementos de um intervalo real qualquer a partir do intervalo $[0,1]$: $[a,b] = \{x \mid x = a \cdot (1-t) + b \cdot t,\ t \in [0,1]\}$.

18) Um aluno estudava sobre polígonos convexos e tentou obter dois polígonos de $'N'$ e $'n'$ lados $(N \neq n)$, e com $'D'$ e $'d'$ diagonais, respectivamente, de modo que $N - n = D - d$. A quantidade de soluções corretas que satisfazem essas condições é
(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) indeterminada.

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
$$N - n = D - d \Leftrightarrow N - n = \frac{N(N-3)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} \Leftrightarrow 2(N-n) = N^2 - 3N - n^2 + 3n$$
$$\Leftrightarrow N^2 - n^2 = 5(N-n) \Leftrightarrow (N+n)(N-n) = 5(N-n)$$
$$N \neq n \Rightarrow N - n \neq 0 \Rightarrow N + n = 5$$
Mas N e n são gêneros de polígonos, então $N \geq 3$ e $n \geq 3$, o que implica $N + n \geq 6$.
Logo, não há nenhuma solução correta (A).

19) Considere a figura abaixo.

A razão $\frac{S(MPQ)}{S(ABC)}$, entre as áreas dos triângulos MPQ e ABC, é
(A) $\frac{7}{12}$
(B) $\frac{5}{12}$
(C) $\frac{7}{15}$

(D) $\frac{8}{15}$

(E) $\frac{7}{8}$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$$\frac{S(AQM)}{S(ABC)}=\frac{AQ\cdot AM}{AB\cdot AC}=\frac{4c\cdot b}{5c\cdot 3b}=\frac{4}{15}$$

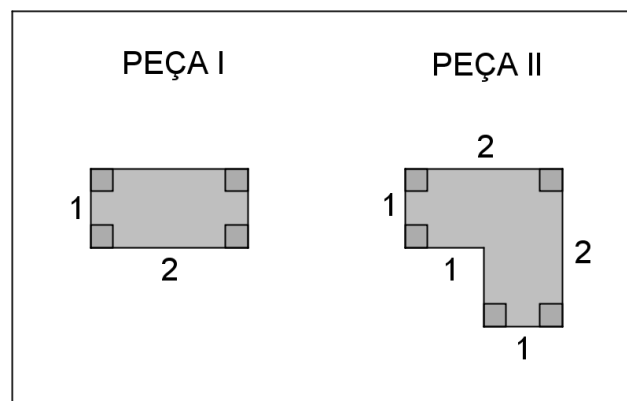
$$\frac{S(BPQ)}{S(ABC)}=\frac{BP\cdot BQ}{BC\cdot BA}=\frac{3a\cdot c}{4a\cdot 5c}=\frac{3}{20}$$

$$\frac{S(CMP)}{S(ABC)}=\frac{CM\cdot CP}{CA\cdot CB}=\frac{2b\cdot a}{3b\cdot 4a}=\frac{1}{6}$$

$$S(MPQ)+S(AQM)+S(BPQ)+S(CMP)=S(ABC)$$

$$\Leftrightarrow S(MPQ)+\frac{4}{15}S(ABC)+\frac{3}{20}S(ABC)+\frac{1}{6}S(ABC)=S(ABC)$$

$$\Leftrightarrow S(MPQ)=\left(1-\frac{4}{15}-\frac{3}{20}-\frac{1}{6}\right)S(ABC)=\frac{5}{12}S(ABC)\Leftrightarrow\frac{S(MPQ)}{S(ABC)}=\frac{5}{12}$$

20) Observe a ilustração a seguir.

Qual a quantidade mínima de peças necessárias para revestir, sem falta ou sobra, um quadrado de lado 5, utilizando as peças acima?

(A) 12
(B) 11
(C) 10
(D) 9
(E) 8

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

A peça I possui área $S_1 = 1 \cdot 2 = 2$ e a peça II possui área $S_2 = 2^2 - 1^2 = 3$.

Um quadrado de lado 5 possui área $5^2 = 25$.

Supondo que sejam utilizadas x peças do tipo I e y peças do tipo II para revestir o quadrado, então $2 \cdot x + 3 \cdot y = 25$.

Para encontrar a quantidade mínima de peças, devemos obter o valor mínimo de $x + y$.

Como $\text{mdc}(2,3) = 1$, a equação acima pode ser resolvida como segue: $2x + 3y = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 7 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$.

Mas, como x e y são as quantidades de peças, ambos devem ser não negativos.

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \geq 0 \Leftrightarrow t \geq -\frac{2}{3} \\ y = 7 - 2t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq t \leq \frac{7}{2}$$

$t \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \{0, 1, 2, 3\}$

Como $x + y = (2 + 3t) + (7 - 2t) = 9 + t$ e $t \in \{0, 1, 2, 3\}$, então o valor mínimo procurado é $(x + y)_{MIN} = 9 + 0 = 9$, que ocorre quando $t = 0$. Neste caso, $x = 2$ e $y = 7$.

A figura a seguir ilustra o caso encontrado acima

Acompanhe o blog www.madematica.blogspot.com e fique sabendo dos lançamentos dos próximos volumes da coleção X-MAT!

Volumes já lançados:
Livro X-MAT Volume 1 EPCAr 2011-2015
Livro X-MAT Volume 2 AFA 2010-2015
Livro X-MAT Volume 3 EFOMM 2009-2015
Livro X-MAT Volume 4 ESCOLA NAVAL 2010-2015
Livro X-MAT Volume 6 EsPCEx 2011-2016